Université de Caen | 1er semestre 2022-2023
UFR Sciences | Mathématiques
M1 Maths Générales | Analyse Complexe

Formule de Cauchy et applications

Exercice 1. On note γ le cercle de centre 1 et rayon 5, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer : $I = 14 \times 2i\pi$, $1/(z-2i)(z+3) = (1/(3+2i))(1/(z-2i) - 1/(z+3))$, $J = (-2+2i) \times 2i\pi$

$$I = \int_\gamma \frac{z^2+5z}{z-2}\mathrm{d}z, \quad J = \int_\gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}\mathrm{d}z.$$

On note δ le cercle de centre 0 et rayon 2, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer : $K(t) = \sin(t)$, $L = 8i\pi e^{-2}/3$

$$K(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z, \quad L = \int_\delta \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z.$$

Exercice 2. On note γ le cercle trigonométrique, parcouru une fois dans le sens direct.

a. Rappeler la formule de Cauchy pour les dérivées.

b. Montrer qu'on a

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\mathrm{d}z.$$

c. En déduire que la série $\sum_n \binom{2n}{n}5^{-n}$ converge et l'identité $\binom{2n}{n} \leq 4^n$, $|(1+z)^2/(5z)| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{5\mathrm{d}z}{3z-1-z^2}. \tag{1}$$

d. Décomposer $5/(3z-1-z^2)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et en déduire une expression simple de (1). $F(z) = \sqrt{5}/(z-(3-\sqrt{5})/2) - \sqrt{5}/(z-(3+\sqrt{5})/2)$ *d'où* $S = \sqrt{5}$

Exercice 3.

a. Soit f une fonction entière telle que $f(z) = O(z^n)$ en $+\infty$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n. On pourra s'inspirer du cas $n = 0$.

b. Soit f une fonction entière telle que $C|z|^\alpha \leq |f(z)| \leq D|z|^\alpha$ pour tout $|z| \geq R$. Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. *Principe de réflexion de Schwarz.*
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à $\mathbb{R}$. On note $\Omega_+ = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\Omega_- = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

a. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pour tout $z \in U$.
   (i) Montrer que g est holomorphe sur U.
   (ii) On suppose que Ω est connexe. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ tel que $I \subset \Omega$.
   (iii) On suppose que Ω est connexe et $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$.

b. Soit $f : \Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur Ω_+, à valeurs réelles sur $\Omega \cap \mathbb{R}$. On définit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ en posant $g(z) = f(z)$ sur Ω_+ et $\Omega \cap \mathbb{R}$ et $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ sur Ω_-.
   (i) Montrer que g est continue.
   (ii) On considère $\gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto a + t(b-a)$. On suppose qu'un voisinage de $[a,b]$ est contenu dans Ω. Montrer que $\int_{\gamma_{a,b}} g(z)\mathrm{d}z$ dépend continûment de a et b. *On pourra utiliser la continuité uniforme de g.*
   (iii) À l'aide du théorème de Morera, montrer que g est holomorphe sur Ω.

c. On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soit f une fonction continue bornée sur $\bar{\mathbb{H}}$, holomorphe sur $\mathbb{H}$, à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Donner un contre-exemple si f n'est pas supposée à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. $1/(z+i)$

Exercice 5. Soit f, g deux fonctions entières telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit z_0 un zéro de g. Montrer que z_0 est également un zéro de f, avec au moins la même multiplicité.

b. Étudier la limite de $f(z)/g(z)$ lors que $z \to z_0$.

c. Montrer que f et g sont proportionnelles.

Exercice 6.

a. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $w \in \Omega$ un zéro d'ordre m de f. Montrer que $\ln|f(z)|/\ln|z-w|$ tend vers m lorsque z tend vers w.

b. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe au voisinage de 0 telle que $f(n^{-1}) = e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Soit f, g deux fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, qui ne s'annulent pas sur Ω. On suppose qu'on a $f'(z_n)/f(z_n) = g'(z_n)/g(z_n)$ pour une suite de points $z_n \in \Omega$ qui converge dans Ω. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda f$. $(f/g)' = 0$

Exercice 8. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $a = \exp(2i\pi t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tel que $f(az) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

a. Montrer qu'il existe $\varphi : \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\to \mathbb{C}$ telle que $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)$ pour tout $r \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. On suppose que f est holomorphe sur U. On considère $g : z \mapsto zf'(z) - f'(1)$.

(i) Montrer que $g(a^n) = 0$ pour tout n. *On commencera par le cas $n = 1$.* *dériver $f(az) = f(z)$, puis récurrence*
En déduire que g est identiquement nulle.

(ii) La fonction z^{-1} admet-elle une primitive sur U ? En déduire que f est constante.

c. Les conclusions des questions précédentes subsistent-elles si $t \in \mathbb{Q}$? *non : z^n pour $t = k/n$*

Exercice 9. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus i(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$.
On cherche à montrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$\forall z \in \Omega \quad z\cos(f(z)) = \sin(f(z)) \tag{2}$$

a. Montrer que si f est une telle fonction on a $f'(z) = 1/(1+z^2)$ sur Ω. *On pourra dériver* (2).

b. Montrer que $1/(1+z^2)$ admet une primitive g sur Ω telle que $g(0) = 0$.

c. Montrer que g vérifie (2) sur $\mathbb{R}$. *On pourra reconnaître une fonction usuelle.* Conclure.

Exercice 10. Soit f une fonction entière telle que $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$.

a. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $B(0,1)$.
On les note $a_1, \ldots, a_n$ avec répétitions éventuelles. On pose

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \bar{a}_i z}{z - a_i}.$$

b. Montrer que g est holomorphe sur $B(0,1)$, sans zéro dans $B(0,1)$, et que $|g|$ est constante sur $\mathbb{T}$.

c. En déduire que g est constante.

d. Montrer que pour tout i on a $a_i = 0$. *On pourra étudier le comportement de f au voisinage de $\bar{a}_i^{-1}$.*

e. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = cz^n$.

Exercice 11. Pour toute fonction f holomorphe sur $B(0,R)$ et $0 \leq r < R$ on pose $M_f(r) = \sup_{|z|=r} f(z)$.
Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$, de coefficient dominant a_n. On pose $s(r) = M_P(r)/r^n$.

a. Montrer que M_f est une fonction croissante, strictement sauf si f est constante.

b. Rappeler pourquoi on a $|a_n| \leq s(r)$ pour tout $r > 0$. Montrer que $\lim_{r\infty} s(r) = |a_n|$.

c. Montrer que s est une fonction décroissante, strictement sauf si P est un monôme.
On pourra appliquer a. à $z^n P(r_1 r_2/z)$ pour comparer $s(r_1)$ et $s(r_2)$.

d. Montrer que si $|P(z)| \leq 1$ pour tout z tel que $|z| \leq 1$, alors $|P(z)| \leq |z|^n$ pour tout z tel que $|z| \geq 1$.