Dérivées partielles et extrémums

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
— $f : (x, y) \mapsto x^2y + 2x - 3y + 12$,
— $f : (x, y) \mapsto 2xy^3 + 3xy - y$,
— $f : (x, y) \mapsto xy \cos(y) + \sin(xy)$,
— $f : (x, y) \mapsto (x + 2y)(2x + y) + \sin(x)$,
— $f : (x, y) \mapsto e^{xy} + (x - y)^2$,
— $f : (x, y) \mapsto \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$,
— $f : (x, y, z) \mapsto x^2z + xyz + yz^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

a. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f\big(xye^{(x^2-y^2)}\big)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g au moyen de f'.

b. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $h(x, y) = \big(x + f(xy), \frac{y}{1+x^2}\big)$. Montrer que la fonction h est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de h en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t, t, t) = 0.$$

Exercice 4. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(0, 0) = 1$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

a. Vérifier que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. En étudiant la restriction de f aux droites d'équation $y = ax$, montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

c. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en $(0, 0)$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} + (x + 1)^2 + y.$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

b. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles par rapport à x et y qu'on calculera.

c. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(a, 0)$ pour $a \neq 0$.

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions définies par les expressions suivantes, et vérifier la validité du théorème de Schwarz :

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}; \qquad g(x, y) = x^y; \qquad h(x, y, z) = xz^3 + y^2z + xy^4z.$$

Exercice 7. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, xy) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2})$. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.

c. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Calculer les matrices hessiennes des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2), \quad g(x,y,z) = x^2+3y^2-z^2+2xy-5yz, \quad h(x,y) = x^3y^2+\cos(xy).$$

Exercice 11. Rechercher les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature :

$$f(x,y) = x^2+4y^2+2x-4y; \qquad g(x,y) = x^2+y^4-2y^2; \qquad h(x,y) = x^3+y^3+9xy-3^3.$$

Exercice 12. Étudier les extrémums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a. $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$,

b. $f(x,y) = x^3+3xy^2-15x-12y$,

c. $f(x,y) = (4x-3y)e^{-(x^2+y^2)}$,

d. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$.

Exercice 13. Étudier les extrémums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a. $f(x,y,z) = z^2(1+xy)+xy$,

b. $f(x,y,z) = (x+y)e^{x+y-z^2}$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par l'égalité $f(x,y) = x^2+xy^2+y^6$.

a. Déterminer les points critiques de f.

b. Montrer que $f(y^3,y)$ est du signe de y si $0 < |y| < \frac{1}{2}$.
En déduire que f n'admet pas d'extrémum local en $(0,0)$.

c. Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f aux autres points critiques.

d. Montrer que f admet $\frac{-1}{432}$ comme minimum local atteint en 2 points.

e. Montrer que si $f(x,y) \leq 0$ alors $xy^2+y^6 \leq 0$ et $x^2+xy^2 \leq 0$.
En déduire que $f^{-1}(]-\infty,0[) \subset A$, où $A = [-1,0] \times [-1,1]$.

f. Montrer que f admet un minimum global et donner sa valeur.

Exercice 15.
On considère les sous-ensembles suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1-x^2\}, \qquad O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1-x^2\},$$
$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1-x^2 \text{ et } y \geq 0\}, \qquad I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\}.$$

On considère par ailleurs la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (3x^2+2x)y-2x$.

a. Représenter O, P, et I sur un dessin. Exprimer F à l'aide de O, P et I.

b. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur F.

c. (i) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Montrer que les extrémums globaux de f sur F sont atteints en des points de $P \cup I$.
On ne cherchera pas à déterminer ces points.

d. (i) Déterminer les extrémums de f sur I et préciser en quels points ils sont atteints.

(ii) Déterminer les extrémums de f sur P et préciser en quels points ils sont atteints.
On pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x, 1-x^2)$.

(iii) Quels sont les extrémums globaux de f sur F ? En quels points sont-ils atteints ?