Fonctions Γ et ζ

La fonction Γ d'Euler est définie par la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t.$$

Exercice 1. Notons $\Omega_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -k, z \notin -\mathbb{N}\}$.

a. (i) Rappeler la définition de t^z, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Donner les valeurs des dérivées de cette expression par rapport à z et à t. Discuter l'existence et la valeur de la limite quand $t \to +\infty$ et $t \to 0^+$.

(ii) Montrer que la fonction Γ est bien définie sur Ω_0.

(iii) Montrer que la fonction Γ est holomorphe sur Ω_0. Donner une formule intégrale pour $\Gamma^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On mettra en œuvre le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec domination sur tout compact de Ω.

b. (i) Montrer que pour tout $z \in \Omega_0$ on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Montrer par récurrence sur n que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser l'*équation fonctionnelle* obtenue à la question précédente.

(iii) Montrer que le prolongement holomorphe de Γ à Ω_n est unique pour tout n.
On peut alors étendre Γ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

c. (i) On utilisant le DSE de exp en 0, montrer que pour tout $z \in \Omega_0$ on a

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t.$$

On justifiera soigneusement l'interversion !

(ii) À l'aide de la question précédente, retrouver l'existence du prolongement holomorphe de Γ à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
On mettra en œuvre les théorèmes d'holomorphie sous l'intégrale et de convergence normale sur tout compact.

(iii) Montrer que Γ admet un pôle simple en $-n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer le résidu correspondant.

Exercice 2.

a. On considère le rectangle γ_R de sommets $-R$, R, $R + 2i\pi$, $-R + 2i\pi$, parcouru une fois dans cet ordre, et la fonction $f : z \mapsto e^{az}/(1 + e^z)$, pour $a \in]0, 1[$ fixé.

(i) Déterminer les pôles et résidus de f.

(ii) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) = r \neq 0$ on a $|f(z)| \leq e^{ar}/|1 - e^r|$. Déterminer la limite de ce majorant lorsque $r \to +\infty$ et $r \to -\infty$.

(iii) Appliquer le théorème des résidus à f sur γ_R et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

b. (i) À l'aide du changement de variable $t \leftarrow st$, montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a

$$e^{-s} s^{x-1} \Gamma(1 - x) = \int_0^{+\infty} e^{-s(1+t)} t^{-x} \mathrm{d}t.$$

(ii) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{s^{-x}}{1 + s} \mathrm{d}s$.

c. (i) À l'aide des questions précédentes, démontrer la *formule des compléments* pour $x \in]0, 1[$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

(ii) Montrer que la formule des compléments est valable sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(iii) En déduire que Γ ne s'annule pas, puis que $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction entière.

La fonction ζ de Riemann est définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice 3.

a. Montrer que ζ est définie et holomorphe sur $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$.
On mettra en œuvre le théorème de convergence normale sur tout compact.

b. Montrer que pour tout $s > 1$ on a

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} \mathrm{d}t.$$

c. En déduire l'*expression intégrale*, pour $s > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$

d. Montrer que l'intégrale à paramètre $\int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$ définit une fonction entière de s.
On mettra en œuvre le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec domination sur tout compact de Ω.

e. Montrer que la fonction $z/(e^z - 1)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence correspondant. On note $B_n/n!$ les coefficients du DSE :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

f. On fixe $s > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} B_n t^{n+s-2}/n!$ converge normalement pour $t \in [0, 1]$.

g. En déduire l'expression, pour $s > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!(n+s-1)} + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$

h. Montrer que $\zeta(s)\Gamma(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (1 - \mathbb{N})$.
On mettra en œuvre le théorème de convergence normale sur tout compact.

i. À l'aide de l'exercice 2, montrer que ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (1 - \mathbb{N})$.

j. À l'aide de l'exercice 1, montrer que les singularités de ζ dans $-\mathbb{N}$ sont artificielles. La fonction ζ se prolonge donc holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer les valeurs $\zeta(-n)$, $n \in \mathbb{N}$ en fonction des *nombres de Bernoulli B_n*.