Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

1er semestre 2022–2023
Portail MIM
Calcul formel

TP 4 : Phénomène de Runge

On se propose d'étudier la convergence uniforme des polynômes d'interpolation vers la fonction interpolée, lorsque le nombre de nœuds tend vers $+\infty$.

On va utiliser `Sage` qui est une « surcouche » de Python permettant de manipuler des objets mathématiques de manière structurée, et qui fait l'interface de manière transparente avec des librairies de calcul formel et numérique très performantes. On peut par exemple définir un « corps des réels » de précision donnée et l'anneau de polynômes correspondant comme suit :

```
RR = RealField(100)
prec = RR(1e-15)
POL.<X> = RR['X']
print(RR)           # Real Field with 100 bits of precision
print(POL)          # Univariate Polynomial Ring in X over Real Field...
P = 3*X^2 + 5
print(P(0))         # 5.0000000000000000000000000000
print(P(RR(pi)))    # 34.608813203268075856503473000
```

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `PolyLagrange(T,i)` qui retourne le i^{e} polynôme de Lagrange $L_i = \prod_{j\neq i}(X-t_j)/(t_i-t_j)$ associé à une liste de nœuds `T` $= (t_0, \ldots, t_n)$.

b. Écrire une procédure `Interpol(f,T)` qui retourne le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction `f` aux nœuds `T`.

c. Écrire une procédure `Réguliers(a,b,n)` qui retourne la liste `T` $= (t_0, \ldots, t_n)$ de $n+1$ points de `RR` régulièrement espacés dans $[a, b]$ (avec donc $t_0 = a$, $t_n = b$).

d. Tester les procédures précédentes : vérifier qu'on obtient les bonnes valeurs `P(T[i]) == sin(T[i])` lorsque `f = sin` et `T = Réguliers(-pi,pi,5)`. Vérifier la nature de l'objet `P` obtenu en affichant `P.parent()`.

e. Écrire une procédure `Dist(f,P,Y)` qui retourne la « distance » $\|f-P\|_{\infty,Y} = \max_{y\in Y}|f(y)-P(y)|$ entre une fonction `F` et un polynôme `P` sur une liste de points `Y`.

f. Calculer la distance, sur `Y = Réguliers(-pi,pi,1000)`, entre `f = sin` et son polynôme d'interpolation `P` aux points `T = Réguliers(-pi,pi,n)`, pour `n = 3, 5, 10, 20`. Qu'observe-t-on ?

g. Qu'observe-t-on pour `n = 100` ? Comment résoudre le problème ?
Et si on remplace `Y` par `Réguliers(-50,50,1000)`, pour `n = 3, 5, 10, 20, 30, 40, 50` ?

On peut en fait montrer que les polynômes d'interpolation P_n de la fonction $f = \sin$, en n points équirépartis dans $[-\pi, \pi]$, convergent uniformément vers f sur ce même intervalle. Cela est notamment assuré par le fait que $|\sin^{(n)}(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ **et** tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On étudie maintenant les polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = 1/(1+5x^2)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

a. Définir `f` comme une fraction rationnelle en `X`. Calculer la distance, sur `Y = Réguliers(-1,1,1000)`, entre `f` et son polynôme d'interpolation aux points `T = Réguliers(-1,1,n)`, pour `n = 10, 20, ..., 100`. Qu'observe-t-on ?

b. Tracer sur un même graphique les courbes de f et des polynômes d'interpolation P pour $n = 3$, 5, 10, 20, 50. On pourra limiter l'axe des ordonnées à l'aide de la commande `plt.ylim([-0.5,2])`.

c. À l'aide de la méthode `f.derivative()`, calculer les dérivées successives de `f` jusqu'à l'ordre 10 puis leur norme du sup sur `Y` (distance à la fonction nulle). Qu'observe-t-on ? Comparer avec la fonction sinus.

d. On définit les nœuds de Tchebyshev associés à un intervalle $[a, b]$ et un entier positif n par la formule

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n.$$

Écrire une procédure `Tchebyshev(a,b,n)` qui retourne la liste des $n+1$ noeuds de Tchebyshev de $[a, b]$.

e. Reprendre la question 1 avec `T = Tchebyshev(-1,1,n)`. Commenter.

Le fait que les polynômes d'interpolation de f, en des points équirépartis, ne convergent pas uniformément vers f, s'appelle le *phénomène de Runge*. On peut montrer que pour toute fonction f de classe C^1, les polynômes d'interpolation de f aux points de Tchebyshev convergent uniformément vers f (mais il existe des fonctions continues pour lesquelles ce n'est pas le cas).

Exercice 3.

a. Montrer que le polynôme d'interpolation R de f aux points $t_0, \dots, t_n$ vérifie les congruences

$$\forall i = 0, \dots, n \quad R \equiv f(t_i) \mod (X - t_i).$$

Ainsi P est la solution d'un problème arithmétique concernant les polynômes $X - t_i$. Lequel ?

b. Justifier l'existence de polynômes A, B tels que $(X - t_0) \cdots (X - t_{n-1})A + (X - t_n)B = 1$.
Soit R_{n-1} le polynôme d'interpolation de f aux points $t_0, \dots, t_{n-1}$. Montrer que

$$R_n = f(t_n)(X - t_0) \cdots (X - t_{n-1})A + (X - t_n)BR_{n-1}$$

prend les valeurs $f(t_i)$ aux points t_i.

c. Utiliser ce qui précède pour écrire une procédure qui calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange de f à l'aide de la fonction `G,A,B = xgcd(P,Q)` qui retourne le PGCD G de deux polynômes P, Q ainsi que deux polynômes A, B qui vérifient la relation $PA + QB = G$.