Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

1er semestre 2022–2023
Portail MIM
Calcul formel

TP 6 : Intégration numérique

Pour calculer de manière approchée l'intégrale de f sur $[a, b]$, on approxime l'aire sous la courbe par celle de n rectangles de largeur $(b-a)/n$ et de hauteur donnée par la valeur de f à gauche de chaque intervalle. On note $I_n^0(f, a, b)$ la valeur obtenue par cette *méthode des rectangles*, qui est également la n^e somme de Riemann à gauche avec pas constant pour cette intégrale. On peut procéder de même en remplaçant les rectangles par des trapèzes, cf les figures ci-dessous. On note $I_n^1(f, a, b)$ la valeur approchée obtenue par la *méthode des trapèzes*.

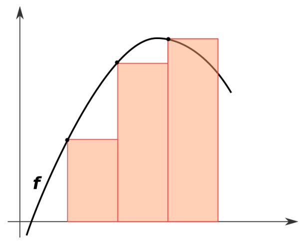

Figure 1 – Rectangles

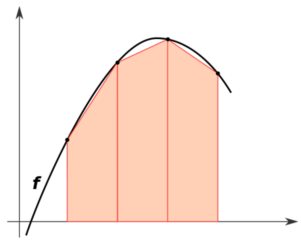

Figure 2 – Trapèzes

Dans la méthode des rectangles (resp. des trapèzes) on approche f par une fonction constante par morceaux (resp. affine par morceaux). De manière analogue, on peut approcher f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux trois points x_i, $(x_i + x_{i+1})/2$ et x_{i+1}, qui est de degré 2. C'est la *méthode de Simpson*[1]. En calculant l'intégrale de ces polynômes sous chaque sous-intervalle, on obtient la formule suivante pour les valeurs approchées $I_n^2(f, a, b)$ correspondantes, où les x_i sont les $n + 1$ points régulièrement espacés dans $[a, b]$:

$$I_n^2(f, a, b) = \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\tfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right).$$

Exercice 1.

a. Écrire l'expression mathématique de $I_n^0(f, a, b)$.

b. Écrire une procédure `Rectangles(f,a,b,n)` qui calcule la valeur de $I_n^0(f, a, b)$. On pourra utiliser une procédure auxiliaire qui fournit la liste des $n + 1$ points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ régulièrement espacés dans $[a, b]$.

c. Tester la procédure `Rectangles` avec la la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour $n = 1, 3, 10, 30, 50$. Comparer avec la valeur exacte I de l'intégrale.

d. Écrire l'expression mathématique de $I_n^1(f, a, b)$.

e. Écrire une procédure `Trapèzes(f,a,b,n)` qui calcule la valeur de $I_n^1(f, a, b)$.

f. Écrire une procédure `Simpson(f,a,b,n)` qui calcule la valeur de $I_n^2(f, a, b)$.

g. Répéter les tests avec les procédures `Trapèzes` et `Simpson`.
Quelle méthode semble avoir la meilleure convergence ?

h. Remplacer l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $[0, \pi]$. Que constate-t-on ?
Expliquer en faisant un schéma dans le cas $n = 4$.

Exercice 2. On souhaite étudier l'erreur relative $E^p(n) = |I - I_n^p|/|I|$ commise par chacune des trois méthodes $(p = 0,\ 1,\ 2)$, en fonction du nombre d'intervalles n.

a. On dispose d'une classe `Intégrale` avec des méthodes `rectangles(n)`, `trapèzes(n)`, `simpson(n)` qui calculent les valeurs approchées sur n sous-intervalles. Ajouter à cette classe une méthode `erreur(n)` qui calcule l'erreur relative $E^p(n)$ en fonction des propriétés `f`, `a`, `b`, `valeur` $= I$, `méthode` $= p$ de l'instance.

1. Thomas Simpson, mathématicien anglais du 18e siècle. L'histoire ne dit pas s'il aimait les donuts.

b. On étudie la fonction $g(x) = 4/(1 + x^2)$ sur $[0, 1]$.

(i) Tracer sur un même graphique les erreurs $E^p(n)$ en faisant varier n dans l'ensemble $\{2^k; k = 0, \dots, 6\}$. L'erreur semble décroître très vite quand n croît, mais il n'est pas évident de voir si la décroissance est polynômiale ou exponentielle.

(ii) Modifier le script pour utiliser une échelle log-log : `plt.xscale('log')`, `plt.yscale('log')`. On fait maintenant varier n dans l'ensemble $\{2^k; k = 0, \dots, 15\}$. Qu'observe-t-on ? Qu'est ce que cela signifie pour le comportement asymptotique de $E^p(n)$?

(iii) Afficher les quotients $\ln(E^p(n))/\ln(n)$, pour n dans l'ensemble $\{2^k; k = 5, \dots, 15\}$. Exécuter également les calculs avec $f(x) = \sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Conjecturer un équivalent simple pour $E^p(n)$, à une constante multiplicative près, pour chacune des trois méthodes.

c. On étudie maintenant la fonction $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

(i) Afficher le graphe des erreurs relatives pour les méthodes des trapèzes et de Simpson, toujours en échelle log-log. On ajoutera sur le graphe les courbes n^{-2}, n^{-4} en pointillés (`linestyle='dashed'`) pour comparer. Que constate-t-on ?

(ii) Recommencer sur les intervalles $[\epsilon, 1]$, en prenant successivement $\epsilon = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$. À quoi le phénomène observé peut-il être dû ?

Exercice 3. Les *fonctions de Bessel* de première espèce sont définies, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, par la formule

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

a. Tracer sur une même figure les graphes de J_0, J_1, J_2, J_3 sur l'intervalle $[0, 30]$.

b. Conjecturer les valeurs C et α dans le comportement asymptotique $J_n(x) \sim Cx^\alpha$ pour J_1, J_2 et J_3.