TP 7 : Quadrature de Gauss

Les *polynômes de Legendre* sont définis par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence

$$nP_n = (2n-1)XP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}.$$

Dans ce TP on représentera les polynômes $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ par la liste de leurs coefficients `L = [`a_0`, `a_1`, ..., `a_n`]`. On rappelle de plus la méthode de Horner qui permet de calculer efficacement $P(x)$:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\cdots)).$$

Les polynômes de Legendre vérifient la normalisation $P(1) = 1$ et ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ relativement au produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, on peut aussi obtenir les P_n en orthonormalisant la base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$.

On peut montrer que P_n admet $n+1$ racines simples réelles qui sont toutes dans $]-1, 1[$. De plus les zéros des polynômes P_n sont *entrelacés* : si a, b sont deux racines consécutives de P_n, il y a exactement une racine de P_{n+1} dans l'intervalle $]a, b[$.

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `Récurrence(Q,R,n)` qui retourne la liste des coefficients du polynômes de Legendre P_n à l'aide des listes `Q`, `R` des coefficients des polynômes P_{n-1} et P_{n-2}.

b. Écrire une procédure `Affiche(P)` qui affiche le polynôme P donné par la liste `P` de ses coefficients. On commencer par le terme constant et on utilisera `'X'` comme symbole d'indéterminée.

c. Afficher les 6 premiers polynômes de Legendre, vérifier qu'ils sont corrects.

d. Écrire une procédure `Éval(P,x)` qui évalue un polynôme P, donné par la liste `P` de ses coefficients, au point `X`.

e. Représenter sur un même graphique les graphes des polynômes de Legendre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 2.

a. Utiliser la procédure `Simpson(f,a,b,m)` du TP précédent pour calculer les produits scalaires $(P_n \mid P_m)$ pour $m \leq n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Vérifier que le résultat est cohérent pour $m < n$. Conjecturer une formule pour $\|P_n\|^2$.

b. Écrire une procédure `Dichotomie(P,a,b)` qui recherche (à 10^{-13} prêt) une racine du polynôme `P` dans l'intervalle [`a`,`b`].

c. Écrire une procédure `ZérosEntrelacés(P,Z)` qui renvoie la liste des racines de `P = `P_n en utilisant la liste `Z` des racines de P_{n-1}.

d. Placer sur le graphique de l'exercice précédent les racines des polynômes P_1, ..., P_5. Pour placer une liste de points `L` sur l'axe des abscisses on peut utiliser la commande suivante :

```
plt.plot(L, [0,...,0], marker='o', color='black').
```

La méthode de Gauss-Legendre consiste à approcher l'intégrale $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par les quantités

$$J_n(f, a, b) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(t_k) \quad \text{où} \quad w_k = \frac{1 - x_k^2}{(n+1)^2 P_n(x_k)}, \quad t_k = \tfrac{a+b}{2} + x_k \tfrac{b-a}{2},$$

et x_0, x_1, ..., x_n sont les racines de P_{n+1}.

Exercice 3.

a. Écrire une procédure `GaussLegendre(f,a,b,n)` qui calcule $J_n(f, a, b)$. La procédure pourra accéder à des variables globales `P`, `Z` où `P[n]` contient (la liste des coefficients de) le polynôme de Legendre P_n et `Z[n]` contient la liste des racines de P_n.

b. Tester la procédure `GaussLegendre` avec la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour $n = 1, 2, 3, 4$.

c. Calculer $J_n - I$ pour $g(x) = x^k$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On fera varier k de 1 à 13, pour $n =$ Jusqu'à quel degré la méthode J_n est-elle exacte sur les polynômes ?

d. Comparer les erreurs relatives $(I_n^2 - I)/I$, $(J_n - I)/I$ obtenues avec les méthodes de Simpson et de Gauss-Legendre, pour $f(x) = \sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On fera varier n de 1 à 20 et on tracera les deux courbes d'erreurs sur le même graphique. On testera également des échelles logarithmiques. Que peut-on conjecturer pour les modes de convergence ?