Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

1er semestre 2023-2024
Mathématiques
Analyse Complexe

Devoir Maison

Exercice 1. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $x > 0$ on rappele que $x^z = \exp(z\ln(x)) \in \mathbb{C}$.
Pour $s \in \mathbb{R}$ on pose $H_s = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > s\}$. On considère les fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{et} \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

a. Montrer que $|x^z| = x^{\mathrm{Re}(z)}$.
Justifier la convergence normale des séries de fonctions ci-dessus sur H_s pour tout $s > 1$.
En déduire que ζ et η sont bien définies et continues sur H_1.

b. On pose $g_n(z) = (-1)^{n+1}/n^z$.

(i) Montrer qu'on a $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z) = \dfrac{1-(1-\frac{1}{2n})^z}{(2n-1)^z}$.
En déduire un équivalent simple de $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z)$ lorsque $n \to \infty$.
On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Montrer que $(\sum_{n\geq 1} g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z))$ converge absolument si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(iii) En déduire que η est bien définie sur H_0.

c. (i) Lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1$, déterminer une relation entre $\zeta(z)$ et $\eta(z)$.
On pourra observer les simplifications dans la différence $\zeta(z) - \eta(z)$.

(ii) Déterminer l'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - 2^{1-z} = 0\}$.

On étend ζ à $H_0 \setminus Z$ grâce à la relation de la question c(i). On peut alors poser la fameuse question (« hypothèse de Riemann ») : si z est un zéro de ζ dans la bande $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, a-t-on nécessairement $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$?
On pourra montrer ultérieurement que le prolongement de ζ à $H_0 \setminus Z$ étudié dans cet exercice est l'unique prolongement holomorphe de ζ à $H_0 \setminus Z$. Notons qu'en fait, on peut prolonger ζ holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$...

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto x/(e^x - 1), 0 \mapsto 1$ définie sur $\mathbb{R}$ entier. Un quotient de fonctions développables en séries entières en 0 est également développable en série entière en 0 si le dénominateur ne s'annule pas, on peut donc définir les *nombres de Bernoulli* B_k en posant $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k/k!$.

a. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3 en effectuant un DL en 0. *On utilisera un DL_4 de* exp.

b. On a $(e^x - 1)f(x) = x$. En effectuant un produit de Cauchy, démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

En déduire la valeur de B_4.

c. Vérifier que $f(x) + x = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

d. On rappelle que $\tanh(z) = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})i\pi$, et que $\tan(x) = -i\tanh(ix)$.
Vérifier que $f(4z) - f(2z) = z\tanh(z) - z$ pour z proche de 0.
En déduire les coefficients des DSE en 0 de tanh et tan en fonction des nombres de Bernoulli.

Les nombres de Bernoulli permettent de calculer les valeurs de ζ aux entiers négatifs (ce qui suppose d'avoir prolongé ζ aux complexes de partie réelle négative !) et aux entiers positifs pairs :

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}.$$

Les valeurs de ζ aux entiers impairs sont beaucoup plus mystérieuses. En 1978, Roger Apéry, professeur à l'Université de Caen, a démontré que $\zeta(3)$ est irrationel. On ne sait pas si c'est le cas également pour $\zeta(5)$...