Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2023-2024
Mathématiques
Analyse Complexe

Contrôle Continu n°1

Exercice 1. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, trouver une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$, sous la forme $f = u + iv$ avec u, $v : \Omega \to \mathbb{R}$, telle que

$$u(x+iy) = x + \frac{x}{(x^2+y^2)} \quad \text{pour tous } x,\, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

On donnera de préférence une expression de $f(z)$ en fonction de la variable z, sans utiliser partie réelle, partie imaginaire, ni module.

Exercice 2. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ et $f(z) = 1/(1+z^2)$ pour $z \neq \pm i$.

a. Développer f en éléments simples dans $\mathbb{C}$.
b. Montrer que $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout circuit γ dans Ω.
c. Montrer que f admet une unique primitive F dans Ω telle que $F(1) = \pi/4$.
d. On a bien sûr $F(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Et pour $x \in \mathbb{R}_-^*$?
e. f admet-elle une primitive sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$? sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$? Justifier.

Exercice 3. Pour $R > 0$ on considère le lacet γ_R formé par le « bord » du secteur angulaire $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R,$ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct. On note δ_R l'arc de cercle $\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct. Ainsi γ_R est la concaténation de deux segments dans le plan complexe et de δ_R.

a. Pourquoi la fonction $f : z \mapsto \exp(iz^2)$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}$? Combien vaut $\int_{\gamma_R} \exp(iz^2)\mathrm{d}z$?
b. À l'aide de la question précédente, montrer que $\int_{\delta_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z = e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^R e^{it^2}\mathrm{d}t$.
c. Montrer que $\left|\int_{\delta_R} \exp(iz^2)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})$.
On pourra utiliser l'inégalité $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ *valable sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
d. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
e. En déduire les valeurs des *intégrales de Fresnel* $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.