Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2023-2024
Mathématiques
Analyse Complexe

Contrôle Continu n°2

Durée : 3h. Les exercices et le problème sont indépendants.
On apportera un soin particulier à la précision des arguments et justifications.
Tous documents et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. On considère les fonctions g et h suivantes :

$$g(z) = \frac{z+1}{e^z - 1 - z}, \quad h(z) = \cos(1/z).$$

a. Déterminer la partie principale de g en 0 et le résidu correspondant.

b. Déterminer et justifier la nature de la singularité de h en 0.

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à $\mathbb{R}$; autrement dit on a $\bar{\Omega} = \Omega$.
On note $\Omega_+ = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\Omega_- = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pour tout $z \in \Omega$.

a. Montrer que g est holomorphe sur Ω.
Plusieurs méthodes sont possibles, il est possible de faire très simple !

b. On suppose que Ω est connexe.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ tel que $I \subset \Omega$.
On peut admettre le résultat de cette question et traiter la dernière question.

c. On suppose que Ω est connexe et que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$.
Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 3. On pose $f(z) = 2e^{iz}/(e^z + e^{-z})$. Pour tout $R > 0$ on considère le rectangle γ_R de sommets $-R$, R, $R + i\pi$, $-R + i\pi$, parcouru une fois dans cet ordre.

a. Justifier le fait que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.
Déterminer ses singularités. Calculer son résidu en $i\pi/2$.

b. Monter que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $R > 0$ on a $|f(R + it)| \leq 2e^{-t}/(e^R - e^{-R})$.

c. Déterminer la valeur de $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ à l'aide du théorème des résidus.

d. Montrer que $\int_{[R,R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

De même $\int_{[-R,-R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, on ne demande pas de le justifier.

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{it}}{e^t + e^{-t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t.$$

Problème au verso

Problème.
Soit γ, γ_1, $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ des lacets. Alors $\gamma_1\gamma_2 : t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ est encore un lacet, ainsi que $\gamma_1 + \gamma_2$ et $f \circ \gamma$, si f est de classe C^1.

a. (i) On suppose que $0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. Calculer $\mathrm{Ind}_{\gamma_1\gamma_2}(0)$ en fonction de $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

On suppose que $0 \notin \gamma_1^*$ et $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)|$ pour tout $t \in [a,b]$.

(ii) Montrer qu'on peut écrire $\gamma_2 = \gamma_1(1+\alpha)$ avec α un lacet tel que $|\alpha(t)| < 1$ pour tout t.

(iii) En déduire que $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$.

b. On fixe un ouvert étoilé $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. On note Z_f l'ensemble des zéros de f et $\mathrm{mult}_f(a)$ la multiplicité d'un zéro $a \in Z$.

(i) À l'aide du principe des zéros isolés, étudier la nature des singularités de f'/f et déterminer les résidus correspondant, en fonction des multiplicités $\mathrm{mult}_f(a)$.

On fixe un lacet γ dans Ω tel que ${}^c\gamma^*$ n'ait qu'une seule composante connexe bornée A, sur laquelle Ind_γ vaut 1. On suppose que γ^* ne contient aucun zéro de f.

(ii) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{a \in Z_f \cap A} \mathrm{mult}_f(a)$.

(iii) Calculer $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$ en fonction des zéros de f et de leurs multiplicités.

(iv) Soit f_1, f_2 deux fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que $|f_2(z) - f_1(z)| < |f_1(z)|$ pour tout $z \in \gamma^*$. Montrer que f_1 et f_2 ont le même nombre de zéros dans A, comptés avec multiplicités *(Théorème de Rouché)*.

c. (i) Montrer que toutes les racines complexes du polynôme $P(z) = z^5 + 7z + 12$ se trouvent dans la couronne $C = D(0,2) \setminus \overline{D(0,1)} = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$. *On appliquera le théorème de Rouché avec $g(z) = z^5$ d'une part, et $h(z) = 7z + 12$ d'autre part.*

(ii) Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polynôme, avec $a_n \neq 0$. Utiliser le théorème de Rouché pour redémontrer le théorème de D'Alembert-Gauss sous la forme suivante : P admet n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité.