Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2e semestre 2023-2024
Mathématiques
Analyse 4

Contrôle n°1

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la série de fonctions $(\sum_{n\geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{n+(-1)^n x^3}{x+n^3}$.

a. (i) On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer un équivalent simple de la suite $(f_n(x))_n$.
   (ii) Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. On fixe $a > 0$.
   (i) Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n + a^3)/n^3$.
   (ii) Montrer que la série $(\sum_{n\geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.

c. On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

On admet la convergence simple de la série de fonctions $(\sum g_n)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui justifie la définition de sa somme g ci-dessus. On admet également que pour $a > 0$ fixé on a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [a, +\infty[\ \ |g_n(t)| \leq e^{-na}$. On pourra donc utiliser cette inégalité dans la suite du sujet sans avoir à la justifier.

a. On fixe $a > 0$. Les assertions suivantes sont-elles correctes ? Justifier les réponses.
   (i) La série de fonctions $(\sum g_n)_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   (ii) La série de fonctions $(\sum g_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   (iii) La suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

b. Montrer que la limite $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existe et déterminer sa valeur.

c. On fixe $a > 0$. Montrer que g est dérivable sur $[a, +\infty[$.

d. Pour tout $x > 0$, calculer $g'(x)$ *sous la forme d'une formule sans signe somme.*

e. En déduire la valeur de $g(x)$, *à nouveau sans signe somme.*

f. Montrer que pour tous $0 < a < b$ on a

$$\int_a^b \ln(1 - e^{-t})\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nb} - e^{-na}}{n^2}.$$

g. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t})\mathrm{d}t$.
   On rappelle la valeur de la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, qu'il n'est pas demandé de justifier.