Contrôle Continu n°2

Durée : 2h30. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. *(3 points)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+n^2}.$$

On admet la convergence simple de la série de fonctions.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. *(4,5 points)*
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{(x^2+1)(x-2)}$.

a. Trouver trois réels a, b, c tels qu'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

b. En déduire le développement en série entière de f en 0. Quel est son rayon de validité ?
On commencera par écrire f comme somme de deux séries entières, puis on précisera les coefficients a_n qui permettent d'écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exercice 3. *(4,5 points)*
On considère l'équation différentielle (E) $xy'' + y = 0$, où y est la fonction inconnue et x est la variable.

a. On suppose que y est une solution de (E) sur $]-r, r[$ qui est développable en série entière sur $]-r, r[$, et on écrit son DSE sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   (i) Exprimer $xy''(x)$ comme somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, avec des coefficients b_n à préciser en fonction des a_n.
   (ii) Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie une relation de récurrence à préciser.
   (iii) Déterminer les coefficients a_n en fonction de a_1.

b. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ qui sont développables en séries entières en 0.

Exercice 4. *(8 points)*
On pose $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

a. Dans cette question on étudie la fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 e^{2x} - 2ye^x$.
   (i) Vérifier que $P = (0, 1)$ est un point critique de φ. Y en a-t-il d'autres ?
   (ii) Écrire la forme quadratique hessienne $q(h, k)$ de φ au point P.
   (iii) À l'aide de la question précédente, déterminer la nature du point critique P.

b. Dans cette question on fixe une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ dont on note u, v les variables.
   Pour $(x, y) \in U$ on pose $f(x, y) = g(x, ye^x)$.
   (i) Calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
   (ii) Montrer que f admet un point critique en $(x, y) \in U$ si et seulement si g admet un point critique en (x, ye^x).

c. Dans cette question on utilise les notations des questions a et b.
   Trouver une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ telle qu'on ait $\varphi = f$.
   Le point P de la question a est-il un extrémum global pour φ ?