Université de Caen | 2e semestre 2023-2024
UFR Sciences | Mathématiques
L2 Maths | Analyse 4

Épreuve de seconde session

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les quatre exercices sont indépendants. Le barême est indicatif.

Exercice 1. *(7 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin(nx^2)}{n^3}$.

a. Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de cette série.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n')$ sur $[-a, a]$, pour $a > 0$ fixé.

d. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *(6 points)* On considère la série entière $\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\times 4^n}\, x^{2n+1}\right)$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série entière converge.

   On note f la somme de cette série entière.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-R, R[$ et exprimer sa dérivée comme somme d'une série entière.

d. Calculer f' sur $]-R, R[$. On attend une expression sans le symbole somme.

e. *À l'aide de la question précédente,* déterminer une expression de f sans le symbole somme, sur $]-R, R[$.

Exercice 3. *(7 points)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, dont on note x et y les variables.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$.

a. On suppose que f est de classe C^1.
   (i) Calculer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ en fonction des dérivées partielles de f.
   (ii) On suppose que g admet un extrémum local en t_0 et on note $(x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$.
   Montrer que le vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ est colinéaire à (x_0, y_0).
   On rappelle que deux vecteurs (a, b) et (c, d) sont colinéaires **ssi** $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$.

b. On considère le cas de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 4xy$.
   (i) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}$.
   (ii) Étudier la nature du point critique $(0, 0)$. La fonction f admet-elle un extrémum global dans $\mathbb{R}^2$?
   (iii) On note $f_{|C}$ la restriction de f au cercle trigonométrique $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
   À l'aide du a., montrer que si $f_{|C}$ admet un extrémum global en $(x, y) \in C$ alors $x = \pm y$.
   (iv) Montrer que $f_{|C}$ admet des extrémums globaux et les déterminer.