

FONCTIONS HOLOMORPHES

Exercice 1. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{2-i}{1+3i}; \quad \frac{(2-i)(1+3i)}{3+2i}; \quad (1+i)^7; \quad (\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^{-5}.$$

Exercice 2. Représenter graphiquement les sous-ensembles de \mathbb{C} définis par les conditions suivantes :

$$|z-3i| \leq |z-3|; \quad |z-i| < 3; \quad \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) < 1; \quad \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2.$$

Exercice 3. Rappelons qu'on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \quad \operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}); \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z});$$

et que les fonctions ainsi définies sur \mathbb{C} coïncident sur \mathbb{R} avec les fonctions connues.

- Montrer qu'on a $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Relier $\operatorname{ch}(z)$ et $\operatorname{sh}(z)$ à $\cos(iz)$ et $\sin(iz)$.
- Montrer qu'on a $\cos(x+iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)$.
Donner les formules analogues pour $\sin(x+iy)$, $\operatorname{ch}(x+iy)$, $\operatorname{sh}(x+iy)$.
- Montrer que pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$ on a $|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = \operatorname{ch}(2y)$.
Cette quantité est-elle bornée quand z varie dans \mathbb{C} ?
- Résoudre dans \mathbb{C} les équations $\cos(z) = 0$, $\sin(z) = 0$.

Exercice 4.

- Montrer que pour $u = e^{it}$ et $w = re^{i\theta} \neq u$ on a les formules suivantes pour le *noyau de Poisson* :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{u+w}{u-w} \right) = \frac{1-|w|^2}{|u-w|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

- On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Vérifier que la *transformation de Cayley* ci-dessous est une bijection de \mathbb{H} vers \mathbb{D} dont on donnera la bijection réciproque :

$$W(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Vérifier que la même formule réalise une bijection entre \mathbb{R} et $\mathbb{T} \setminus \{1\}$.

- Montrer la formule suivante, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = W(\lambda)$, $z \in \mathbb{H}$, $w = W(z)$: $i \frac{u+w}{u-w} = \frac{1+\lambda z}{\lambda-z}$.

Exercice 5. On définit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $f(x+iy) = x+iy^2$.

- Montrer que f est \mathbb{R} -différentiable sur \mathbb{C} . Calculer $df(x_0, y_0)$ pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.
- f est-elle \mathbb{C} -dérivable en 0? On calculera $f(z)/z$ sur l'axe des abscisses, et sur l'axe des ordonnées.
- À l'aide des équations de Cauchy-Riemann, déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ en lesquels f est \mathbb{C} -dérivable.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On pose $u = \operatorname{Re} \circ f$, $v = \operatorname{Im} \circ f$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------|------------------------|
| a. f est constante ; | b. u est constante ; | c. v est constante ; |
| d. \bar{f} est holomorphe ; | e. $ f $ est constante. | |

Que peut-on en déduire sur l'image des fonctions holomorphes non constantes? *On verra plus tard en cours un résultat beaucoup plus fort...* En particulier il n'existe pas de fonction holomorphe non constante $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe non vide.

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On note $u = \operatorname{Re} \circ f$, $v = \operatorname{Im} \circ f$. On fixe $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. On considère les courbes de niveau \mathcal{C} , \mathcal{D} de u et v respectivement passant par z_0 .

- Dire pourquoi on ne peut pas avoir $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = 0$ au point z_0 .
- Rappeler les équations des tangentes à \mathcal{C} et \mathcal{D} au point z_0 , en fonction des dérivées partielles de u et v .
- Montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 8. On cherche les fonctions f , holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, telles que $\operatorname{Re} \circ f = u$, où $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par la formule $u(x + iy) = e^x(x \cos(y) - y \sin(y))$.

- Écrire les équations de Cauchy-Riemann pour f , et en déduire les dérivées partielles de $v = \operatorname{Im} \circ f$ par rapport à x et à y .
- On fixe y . Déterminer la fonction $(x \mapsto v(x + iy))$ à une constante près. On note $C(y)$ cette constante.
- Déterminer $C(y)$. Quelles sont les fonctions f répondant au problème ?
- Donner une expression simple pour ces fonctions f en fonction de la variable z .

De même, déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur \mathbb{C} telles que $\operatorname{Re} \circ f(x + iy) = 2xy$.

Exercice 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert tel que la fonction $G : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, $(r, \theta) \mapsto F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ soit bien définie. On dit parfois que G est une expression de F en coordonnées polaires, et on note même parfois $F(r, \theta) = G(r, \theta)$.

On suppose que $0 \notin \Omega$ et que F est différentiable sur Ω . À quelle condition sur les dérivées partielles de G la fonction F est-elle holomorphe ? Donner la version polaire des équations de Cauchy-Riemann.

Exercice 10. On définit une fonction $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$F(x + iy) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}.$$

On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

- Montrer qu'on a $F(z)^2 = z$ sur $\bar{\Omega}$.
- Montrer que F est différentiable sur Ω .
- Déterminer une expression polaire de F sur Ω .
Se référer à l'exercice précédent et prendre $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$.
- Montrer que F est holomorphe sur Ω . Calculer $F'(z)$ en fonction de $F(z)$.

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\left(\sum_n \frac{n^3}{(n-1)!} (z-i)^n \right); \quad \left(\sum_n (1+i)^n z^n \right); \quad \left(\sum_n \frac{2^n + i}{3^n - i} z^{2n} \right); \quad \left(\sum_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} (z+1)^{3n} \right).$$

Exercice 12. Déterminer le DSE en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right); \quad g(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 2}; \quad h(x) = (\ln(1-x))^2; \quad k(x) = e^x \cos(x).$$

On précisera les domaines de définition des fonctions et les rayons de convergence de leur DSE.

Pour h on exprimera les coefficients du DSE en fonctions des sommes harmoniques $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 13. On note $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$.

- Rappeler le DSE usuel de f au point $x = 1$.
- Montrer que f admet un DSE en tout point $a \in \mathbb{R}_+^*$, dont on précisera le rayon de convergence.
- On fixe $0 < b < a$ et on note $f(x) = \sum_0^\infty \alpha_n (x-a)^n = \sum_0^\infty \beta_k (x-b)^k$ les DSE de f en a et b .
 - En appliquant le théorème de Fubini, montrer que $\beta_k = \sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} \alpha_n (b-a)^{n-k}$.
 - En appliquant le théorème de Fubini dans l'autre sens, montrer qu'on a $\sum_0^\infty \beta_k (z-b)^k = \sum_0^\infty \alpha_n (z-a)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-b| < b$.
- Déterminer la réunion Ω des disques ouverts de convergence des DSE précédents.
Montrer que f s'étend en une fonction analytique holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

On verra plus tard en cours que l'analyse complexe fournit des outils bien plus puissants pour étudier et réaliser ce genre d'extensions holomorphes...

Exercice 14.

- Quel est le rayon de convergence de la série entière $(\sum_n n^2 z^n)$? On note f sa somme.
- Rappeler le DSE en 0 de $g : z \mapsto (1-z)^{-1}$.
- À l'aide du théorème de dérivation des séries entières, calculer f .
- En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^\infty n^2/2^n$, $\sum_{n=0}^\infty n^2/(1+i)^n$.

Exercice 15.

- Calculer $f : x \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$ pour $|x| < 1$ en dérivant deux fois.
- Montrer que la formule est encore valable en $x = 1$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.