

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Exercice 1. Calculer $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$ dans les cas suivants :

- γ est le segment orienté $[0, 2i]$;
- γ est le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens direct ;
- γ est l'arc de parabole $y = x^2$ parcouru de 0 à $1 + i$.

Exercice 2. Soit γ le cercle unité, parcouru une fois dans le sens direct. On pose $f_n(z) = z^{-1}(z + z^{-1})^{2n}$, pour $z \in \mathbb{C}^*$.

- Rappeler la valeur de $\int_{\gamma} z^k dz$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- En développant, montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \binom{2n}{n}$.
- En notant que $z + z^{-1} = 2 \operatorname{Re}(z)$ sur γ^* , montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \frac{2^{2n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Wallis $W_{2n} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} dt$.

Exercice 3. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un chemin. On définit $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ en posant $\delta(t) = \gamma(t)^{-1}$. Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ on a

$$\int_{\gamma} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = - \int_{\delta} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Qu'obtient-on dans le cas où γ est le cercle unité ?

Exercice 4. Calculer $\int_{\gamma} dz/z$ où γ est le carré de sommets $\pm 1 \pm i$ parcouru une fois dans le sens direct. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. Calculer directement $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$, où γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Refaire le calcul en utilisant l'identité $2 \operatorname{Re}(z) = z + z^{-1}$ sur le cercle unité.

Exercice 6. On fixe $a, b > 0$. À l'aide de l'indice de 0 par rapport à l'ellipse $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto a \cos(t) + ib \sin(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2}.$$

Exercice 7.

Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'indices par rapport au cycle γ de certains points bien choisis :

$$\int_{\gamma} \frac{(2+i)z^2 - 2z + i}{z^3 - z^2 + z - 1} dz.$$

On commencera par décomposer l'intégrande en éléments simples.

Exercice 8. Calculer $\int_{\gamma} ze^{z^2} dz$ dans les cas suivants :

- γ est le segment orienté $[0, 1 + i]$;
- γ est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ parcouru une fois de 0 à $1 + i$.

Exercice 9. On fixe $a, b \in \mathbb{C}^*$. Déterminer les primitives sur \mathbb{C}^* de ze^{az} , $e^{az} \cos(bz)$.

Exercice 10. On note $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bar{D}_1$.

On fixe $a, b \in \bar{D}_1$ et on pose $f(z) = (z-a)^{-1} - (z-b)^{-1}$ pour tout $z \neq a, b$.

- (i) On suppose $a \neq 0, b \neq 0$. Montrer que f admet un DSE en 0, déterminer ce dernier et son rayon de convergence R .
(ii) Montrer que f admet une primitive sur D_R .
- (i) Soit γ un circuit dans Ω . Faire un dessin.
Que peut-on dire de $\text{Ind}_\gamma(a)$ et $\text{Ind}_\gamma(b)$? Justifier par un argument topologique.
(ii) Montrer que f admet une primitive F sur Ω . Et sur $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$?
(iii) Montrer que $\frac{z-a}{z-b} \exp(-F(z))$ est constant sur Ω .
- (i) Montrer qu'il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\exp(g(z)) = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.
(ii) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(z)^n = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.
- Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que ses racines complexes a_1, \dots, a_n appartiennent à \bar{D}_1 .
Montrer qu'il existe $r : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $r(z)^n = P(z)$ sur Ω .

Exercice 11. On cherche à calculer $G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ixt} dx$. On ne demande pas de justifier la convergence de l'intégrale. On rappelle la valeur $G(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss). On va utiliser la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$.

- Justifier le fait que f admet une primitive sur \mathbb{C} .
- Montrer que $\int_{-R}^R f(x+it) dx = \int_{-R}^R f(x) dx - i \int_0^t f(-R+ix) dx + i \int_0^t f(R+ix) dx$.
On utilisera un circuit à préciser dans le plan complexe.
- Montrer que $|\int_0^t f(R+ix) dx| \leq e^{-R^2} \int_0^t e^{x^2} dx$.
- Montrer que l'intégrale $\int_{-R}^R f(x+it) dx$ a une limite quand $R \rightarrow +\infty$ et préciser la valeur de la limite.
- En déduire la valeur de $G(t)$.

Exercice 12. On note Log la détermination principale du logarithme.

- Combien vaut $\text{Log}(e^{i\pi/2} e^{3i\pi/4})$?
- Pour $z = e^{2i\pi/3}$, comparer $\text{Log}(z^2)$ et $2\text{Log}(z)$.
- Pour $z = 3 + 4i$, combien vaut $\text{Log}(\exp(z))$?
- Montrer que si $\text{Re}(z) > 0, \text{Re}(z') > 0$ alors $\text{Log}(zz') = \text{Log}(z) + \text{Log}(z')$.
- Pour quels nombres complexes z a-t-on $\text{Log}(\exp(z)) = z$?

Exercice 13. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. On appelle détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω toute fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z)^p = z$ pour tout $z \in \Omega$.

- Montrer que si f est une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. En déduire que $0 \notin \Omega$.
- Montrer que s'il existe une détermination du logarithme sur Ω , alors il existe une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω .
- Montrer que s'il existe une détermination f_1 de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω connexe alors il en existe exactement p , que l'on explicitera en fonction de f_1 .
- Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt[3]{\cdot}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ telle que $f(1) = 1$. Combien vaut $f(i^3)$?
- Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt{\cdot}$ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $f(-1) = i$. Déterminer $f(\Omega)$.

Exercice 14. Pour tous $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, w \in \mathbb{C}$ on pose $z^w = \exp(w \text{Log}(z))$, où Log est la détermination principale du logarithme.

- Calculer $i^i, \text{Re}((1+i)^i)$.
- Pour $z = e^{3i\pi/4}$, comparer $z^{2i}, (z^2)^i$ et $(z^i)^2$.
- Calculer dz^w/dz .