Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2023-2024
Mathématiques
Analyse Complexe

Formule de Cauchy et applications

Exercice 1. On note γ le cercle de centre 1 et rayon 5, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer :

$$I = \int_\gamma \frac{z^2+5z}{z-2}\mathrm{d}z, \quad J = \int_\gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}\mathrm{d}z.$$

On note δ le cercle de centre 0 et rayon 2, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer :

$$K(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z, \quad L = \int_\delta \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z.$$

Exercice 2. On note γ le cercle trigonométrique, parcouru une fois dans le sens direct.

a. Rappeler la formule de Cauchy pour les dérivées.

b. Montrer qu'on a

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\mathrm{d}z.$$

c. En déduire que la série $\sum_n \binom{2n}{n}5^{-n}$ converge et l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{5\mathrm{d}z}{3z-1-z^2}. \tag{1}$$

d. Décomposer $5/(3z-1-z^2)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et en déduire une expression simple de (1).

Exercice 3. On rappelle que le n^{e} polynôme de Chebyshev T_n est l'unique polynôme de degré n véfifiant l'identité $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. On note $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, w \mapsto \frac{1}{2}(w + w^{-1})$. On note $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.

a. Montrer que pour tout n et tout $w \in \mathbb{C}^*$ on a $T_n(\varphi(w)) = \varphi(w^n)$.

b. Calculer $\varphi(re^{i\theta})$ sous forme cartésienne. Décrire $E_r := \varphi(S_r)$ pour $r > 1$. On note $\gamma_r : [0, 2\pi] \to E_r, \theta \mapsto \varphi(re^{i\theta})$; $\delta_r = d(E_r, [-1, 1]) > 0$; F_r l'intérieur de (l'enveloppe convexe de) E_r.

c. Montrer que pour tout n et pour tout $z \in E_r$ on a $|T_n(z)| \geq \frac{1}{2}(r^n - r^{-n})$.
Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $|T_n(x)| \leq 1$.

d. Montrer que les zéros de T_n sont les points $x_k^{(n)} = \cos(\frac{\pi}{n}(k + \frac{1}{2}))$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

e. Montrer que $T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k^{(n)})$.

f. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe avec Ω ouvert contenant $[-1, 1]$. Montrer qu'il existe $r > 1$ tel que $F_r \subset \Omega$.
On fixe un tel r dans la suite.

g. On considère la fonction $P_n(z) = (2i\pi)^{-1}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\frac{T_n(w)-T_n(z)}{T_n(w)}\mathrm{d}w$ définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus E_r$.
Montrer que P_n est un polynôme de degré $n-1$.

h. Montrer qu'on a $P_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
Ainsi P_n est le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_k^{(n)}$.

i. On fixe $x \in [-1, 1]$. Donner une formule intégrale pour $f(x) - P_n(x)$. En déduire que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{L(\gamma_r)}{2\pi}\frac{2\|f\|_{\infty,E_r}}{\delta_r(r^n - r^{-n})}.$$

On a ainsi montré que si f est analytique sur $[-1, 1]$, les polynômes d'interpolation de f aux points de Chebyshev convergent vers f uniformément sur $[-1, 1]$. Ce résultat reste vrai avec des hypothèses beaucoup plus faibles — par exemple il suffit que f soit de classe C^1 — mais il existe des fontions f continues pour lesquelles il est faux.

Exercice 4.

a. Soit f une fonction entière telle que $f(z) = O(z^n)$ en $+\infty$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n. On pourra s'inspirer du cas $n = 0$.

b. Soit f une fonction entière telle que $C|z|^\alpha \leq |f(z)| \leq D|z|^\alpha$ pour tout $|z| \geq R$. Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit f, g deux fonctions entières, non identiquement nulles, telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit z_0 un zéro de g. Montrer que z_0 est également un zéro de f, avec au moins la même multiplicité.

b. Étudier la limite de $f(z)/g(z)$ lors que $z \to z_0$.

c. Montrer que f et g sont proportionnelles.

Exercice 6. Soit f, g deux fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, qui ne s'annulent pas sur Ω. On suppose qu'on a $f'(z_n)/f(z_n) = g'(z_n)/g(z_n)$ pour une suite de points deux-à-deux distincts $z_n \in \Omega$ qui converge dans Ω. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 7. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $a = \exp(2i\pi t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tel que $f(az) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

a. Montrer qu'il existe $\varphi : \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\to \mathbb{C}$ telle que $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)$ pour tout $r \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. On suppose que f est holomorphe sur U. On considère $g : z \mapsto zf'(z) - f'(1)$.

(i) Montrer que $g(a^n) = 0$ pour tout n. *On commencera par le cas* $n = 1$.
En déduire que g est identiquement nulle.

(ii) La fonction z^{-1} admet-elle une primitive sur U ? En déduire que f est constante.

c. Les conclusions des questions précédentes subsistent-elles si $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 8. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus i(]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$.
On cherche à montrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$\forall z \in \Omega \quad z\cos(f(z)) = \sin(f(z)) \tag{2}$$

a. Montrer que si f est une telle fonction on a $f'(z) = 1/(1 + z^2)$ sur Ω. *On pourra dériver* (2).

b. Montrer que $1/(1 + z^2)$ admet une primitive g sur Ω telle que $g(0) = 0$.

c. Montrer que g vérifie (2) sur $\mathbb{R}$. *On pourra reconnaître une fonction usuelle.* Conclure.

Exercice 9. On fixe un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

a. Montrer que si f ne s'annule pas et $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors f est constante.

b. Montrer que si f est non constante et $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors ce minimum est nul.

Exercice 10. Soit f une fonction entière telle que $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$.

a. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $B(0, 1)$.
On les note $a_1, \ldots, a_n$ avec répétitions éventuelles. On pose

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \bar{a}_i z}{z - a_i}.$$

b. Montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(0, 1)$, sans zéro dans $B(0, 1)$, et que $|g|$ est constante sur $\mathbb{T}$.

c. En déduire que g est constante.

d. Montrer que pour tout i on a $a_i = 0$. *On pourra étudier le comportement de* f *au voisinage de* $\bar{a}_i^{-1}$.

e. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = cz^n$.