FONCTIONS MÉROMORPHES ET RÉSIDUS

Exercice 1. Les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée en 0. Déterminer la nature de ces singularités.

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z}, \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad h(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z-1)}, \quad k(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Exercice 2. Déterminer les pôles des fonctions suivantes, les parties singulières et les résidus correspondant :

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2+4}, \quad g(z) = \frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}, \quad h(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2 z}, \quad k(z) = \frac{\cos z}{(\sin z)^2}.$$

Pour f avec pôle en a et h holomorphe au voisinage de a, a-t-on $\mathrm{Res}_{hf}(a) = h(a)\,\mathrm{Res}_h(a)$? On distinguera selon l'ordre du pôle a.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes (où $a > 0$) à l'aide du théorème des résidus :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}, \quad J(a) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, \quad K(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos(t)} \ (a > 1), \quad J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 - 2a\cos(t) + 1} \ (a \in \mathbb{R},\, a \neq \pm 1).$$

On pourra noter que $\cos(t) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ si $z = e^{it}$.

Exercice 5. Pour tout entier positif N on note γ_N le carré de sommets $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, parcouru une fois dans le sens positif. On considère la fonction cotangente définie sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

On fixe de plus une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec pôles non entiers et en nombre fini, et telle que $f(z) = O(|z|^{-2})$.

a. (i) Étudier les singularités de $\pi\cot(\pi z)$ et déterminer les résidus correspondant.
   (ii) Montrer qu'il existe une constante A_1 telle qu'on ait $|\cot(\pi z)| \leq A_1$ pour tout $z \in \pm(N+\frac{1}{2}) + i\mathbb{R}$.
   (iii) Montrer qu'il existe une constante A_2 telle qu'on ait $|\cot(\pi z)| \leq A_2$ pour tout $z \in \mathbb{R} \pm i(N+\frac{1}{2})$.

b. (i) Montrer que $\int_{\gamma_N} \pi\cot(\pi z) f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand $N \to \infty$.
   (ii) On note $R(a)$ les résidus de $\pi\cot(\pi z)f(z)$ aux pôles $a \in A$ de f.
   À l'aide du théorème des résidus, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{a\in A} R(a).$$

c. Application. Montrer qu'on a, pour $a \neq 0$ resp. $a \notin \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi a)^2}.$$

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé, $S \subset \Omega$ un ensemble fini, f méromorphe sur Ω avec S comme ensemble de pôles. Montrer que f admet des primitives sur $\Omega \setminus S$ si et seulement si $\mathrm{Res}_f(a) = 0$ pour tout $a \in S$.

Exercice 7. Soit P un polynôme non constant à racines simples complexes $a_1, \ldots, a_n$.

a. Calculer $\mathrm{Res}_{1/P}(a_i)$ pour tout i.

b. On pose $f(z) = \sum_{i=1}^{n} [P'(a_i)(z - a_i)]^{-1}$.

   (i) Montrer que $f - 1/P$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier.

   (ii) Montrer que $f - 1/P$ est bornée sur $\mathbb{C}$, puis que $1/P = f$.

c. On suppose toujours que P est à racines simples, et de plus que $\deg(P) \geq 2$.

   (i) Soit γ_R le cercle de centre 0 et rayon R, parcouru une fois dans le sens direct.
   Montrer que $\int_{\gamma_R} \mathrm{d}z/P(z) \to 0$ quand $R \to +\infty$.

   (ii) En déduire que $\sum_{i=1}^{n} 1/P'(a_i) = 0$.

Les deux derniers exercices ne concernent pas le théorème des résidus.

Exercice 8. On note γ_r le demi-cercle de centre 0 et rayon r dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, parcouru une fois dans le sens direct. On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{iz}/z$.

a. Écrire $\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z$ comme une intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ et déterminer ses limites quand $r \to 0$ et $r \to +\infty$, à l'aide du théorème de convergence dominée.

b. Montrer que $\int_{-R}^{-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ pour tous $0 < \epsilon < R$.
On précisera le théorème utilisé, et l'ouvert sur lequel on l'applique.

c. Déduire de ce qui précède la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 9.
On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

a. On fixe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$.
On définit une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ en posant $g(0) = f'(0)$ et $g(z) = f(z)/z$ pour $z \neq 0$.

   (i) Montrer que g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et continue en 0.

   (ii) Montrer que g est holomorphe sur Ω. *Plusieurs arguments sont possibles, en utilisant la question précédente ou pas. On précisera le résultat de cours utilisé.*

   (iii) On pose $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Montrer que pour $0 < r < 1$ on a $\sup_{z \in D_r} |g(z)| \leq 1/r$.
   On pourra appliquer un principe du maximum, en rappelant précisément le résultat utilisé.

   (iv) En déduire qu'on a $|f'(0)| \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Omega$.

   (v) On suppose de plus qu'il existe $z_0 \in \Omega \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, ou que $|f'(0)| = 1$.
   Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \Omega$.
   On pourra appliquer à nouveau un principe du maximum en précisant.

b. Pour a, $b \in \mathbb{C}$ on définit $f_{a,b} : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$. On suppose dans la suite que $|a|^2 = |b|^2 + 1$.

   (i) Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, holomorphe, et à valeurs dans Ω.
   Pour la dernière assertion on vérifiera que $|az + b|^2 < |\bar{b}z + \bar{a}|^2$ *si* $|z| < 1$.

   (ii) Calculer $f_{a,b} \circ f_{\bar{a},-b}$.
   On voit ainsi que $f_{a,b}$ *est une bijection holomorphe de* Ω *à réciproque holomorphe.*

c. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une bijection holomorphe à réciproque f^{-1} holomorphe.

   (i) On suppose tout d'abord que $f(0) = 0$.
   Montrer que pour tout $z, w \in \Omega$ on a $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ et $|f(z)| \leq |z|$.
   En déduire que $f = f_{c,0}$ avec $|c| = 1$.

   (ii) On ne suppose plus que $f(0) = 0$ et on pose $w = f(0)$.
   On a $|w| < 1$ et on peut donc écrire $w = -b/a$ avec $|a| > |b|$; quitte à multiplier par un réel positif on peut de plus supposer que $|a|^2 = |b|^2 + 1$. Combien vaut alors $f_{a,b}(w)$?
   Montrer que f est de la forme $f_{d,e}$.