TP 1 : Méthodes dichotomiques

On importera le module math en tapant `from math import *` en début de TP et on utilisera $|x| < \text{prec}$ pour tester $x = 0$, avec $\text{prec} = 10^{-15}$ (précision machine).
Toute fonction mathématique sera définie comme une procédure Python.

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `Dichotomie(f,a,b,p)` qui calcule par dichotomie un zéro d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec précision p.

b. Utiliser votre procédure `Dichotomie` pour calculer $\sqrt{3}$ avec précision $p = 10^{-10}$ en partant d'une fonction f et d'un intervalle $[a, b]$ judicieusement choisis. Vérifier que le carré du résultat obtenu vaut bien 3.

c. Vous êtes-vous assuré que votre procédure ne calcule jamais deux fois l'évaluation de f au même point ? Dans le cas contraire, faites les modifications nécessaires afin d'optimiser le temps de calcul.

Exercice 2.

a. Écrire une procédure `Lagrange(f,a,b,p)` qui calcule avec la méthode de Lagrange un zéro d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec précision p.

b. Introduire un compteur dans vos procédures pour pouvoir comparer le nombre d'itérations.
Quel est le lien avec le nombre de calculs de valeurs de f ?

c. Comparer vos procédures avec $f(x) = x^2 - 3$, en considérant $p = 10^{-10}$ et $[a, b] = [1, 2]$.

d. Même question, mais avec l'intervalle $[a, b] = [1, 5]$.
Que constate-t-on ? Proposez une explication en vous aidant d'un dessin.
Peut-on *a priori* privilégier une méthode plutôt qu'une autre ?

Exercice 3.

a. Montrer que les équations $x^3 = x + 1$ et $\cos x = x$ ont une unique solution réelle.

b. Dans chaque cas, comparer vos méthodes pour déterminer cette solution avec précision $p = 10^{-10}$ en considérant un intervalle judicieusement choisi.

Exercice 4. À l'aide de la librairie `mathplotlib` et de votre procédure `Dichotomie`, tracer le graphe de la fonction racine carrée sur $[0, 4]$. On pourra calculer par exemple 100 valeurs de la fonction. Combien de carrés a-t-on calculé ?