TP 7 : Polynômes de Laguerre

Les *polynômes de Laguerre* sont définis par $P_0 = 1$, $P_1 = 1 - X$ et la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1-X)P_n - nP_{n-1}.$$

Dans ce TP on représentera les polynômes $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ par la liste de leurs coefficients `L = [`a_0`, `a_1`, ..., `a_n`]`. On rappelle de plus la méthode de Horner qui permet de calculer efficacement $P(x)$:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\cdots)).$$

Les polynômes de Laguerre forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ relativement au produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

On a $\deg(P_n) = n$, ainsi on peut aussi obtenir les P_n en orthonormalisant la base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$, puis en normalisant de manière à avoir $P_n(0) = 1$.

On peut montrer que P_n admet n racines simples réelles qui sont toutes dans $\left]0, n^2\right[$. De plus les zéros de la suite des polynômes P_n sont *entrelacés* : si a, b sont deux racines consécutives de P_n, il y a exactement une racine de P_{n+1} dans l'intervalle $]a, b[$.

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `Récurrence(Q,R,n)` qui retourne la liste des coefficients du polynômes de Laguerre P_{n+1} à l'aide des listes `Q`, `R` des coefficients des polynômes P_n et P_{n-1}.

b. Écrire une procédure `Affiche(P)` qui affiche le polynôme P donné par la liste `P` de ses coefficients. On commencera par le terme constant et on utilisera `'X'` comme symbole d'indéterminée.

c. Afficher les 6 premiers polynômes de Laguerre, vérifier qu'ils sont corrects.

d. Écrire une procédure `Éval(P,x)` qui évalue un polynôme P, donné par la liste `P` de ses coefficients, au point `x`, à l'aide de la méthode de Horner.

e. Représenter sur un même graphique les graphes des polynômes de Laguerre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sur l'intervalle $[0, 13]$.

Exercice 2.

a. Utiliser la procédure `Simpson(f,a,b,p)` du TP précédent pour calculer les produits scalaires $(P_n \mid P_m)$ pour $m \leq n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. On prendre $a = 0$ et $b = 50$ pour approcher l'intégrale de 0 à $+\infty$, avec $p = 5000$ subdivisions.
Vérifier que le résultat est cohérent pour $m < n$. Conjecturer une formule pour $\|P_n\|^2$.

b. Écrire une procédure `Dichotomie(P,a,b)` qui recherche (à 10^{-13} prêt) une racine du polynôme `P`, donné par la liste de ses coefficients, dans l'intervalle [`a`,`b`].

c. Écrire une procédure `ZérosEntrelacés(P,Z)` qui renvoie la liste des racines de `P =` P_n en utilisant la liste `Z` des racines de P_{n-1}.

d. Placer sur le graphique de l'exercice précédent les racines des polynômes P_1, ..., P_5. Pour placer une liste de points `L` sur l'axe des abscisses on peut utiliser la commande suivante :

```
plt.plot(L, [0,...,0], marker='o', color='black').
```

suite au verso

La méthode de Gauss-Laguerre consiste à approcher l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ par les quantités

$$J_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(t_k) \quad \text{où} \quad w_k = \frac{x_k}{(n+1)^2 P_{n+1}(x_k)^2},$$

et x_1, ..., x_n sont les racines du polynôme de Laguerre P_n.

Exercice 3.

a. Écrire une procédure `GaussLaguerre(f,n)` qui calcule $J_n(f)$. La procédure pourra accéder à des variables globales `P`, `Z` où `P[n]` contient (la liste des coefficients de) le polynôme de Laguerre P_n et `Z[n]` contient la liste des racines de P_n.

b. Calculer $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ et vérifier que la procédure `GaussLaguerre` donne des valeurs approchées correctes de cette valeur, pour $n = 1, 2, \ldots, 14$.

c. Calculer, par récurrence, $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Calculer $J_n(f_k) - I_k$ pour $f_k(t) = t^k$. On fera varier k de 0 à 13, pour $n = 5$.
Jusqu'à quel degré la méthode J_n est-elle exacte sur les polynômes ?

d. La fonction Γ est définie, pour $x > 0$, par la formule $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
Utiliser la procédure `GaussLaguerre` pour tracer le graphe de Γ sur l'intervalle $[0, 4]$. On placera 400 points et on prendra $n = 10$.

e. Sur le graphe obtenu à la question précédente, que peut-on dire du comportement de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0$?
La fonction Γ vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. Que peut-on en déduire pour le comportement de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0$?
Commenter et expliquer. On pourra répéter le tracé du graphique avec $n = 20$.