Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2024-2025
Mathématiques
Analyse Complexe

Contrôle Continu n°1

Durée : 2h30. Les documents, calculateurs et outils de communication sont interdits.
Un part importante de la notation concernera la rédaction : précision des raisonnements, détail des calculs et des arguments, présentation de la copie, absence de ratures etc... L'usage de brouillon est fortement recommandé.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans l'ordre souhaité. Il est tout de même recommandé de les aborder tous les trois.

Exercice 1.

a. Déterminer la couronne de convergence de la série de Laurent $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{2^k+3^{-k}}{4^k+6^{-k}}\, z^k\right)$.

b. On considère la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2}$.

(i) Déterminer le développement en série de Laurent de f autour de 0, valable pour $|z| > 1$.

(ii) Déterminer le développement en série de Laurent de f sur la couronne $A(2,1,3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-2| < 3\}$.

Pour le i) il n'est pas *nécessaire de décomposer en éléments simples.*

Exercice 2. On cherche à calculer $G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ixt}\mathrm{d}x$. On ne demande pas de justifier la convergence de l'intégrale (l'exercice va permettre de la retrouver).
On admet cependant que pour $t = 0$ l'intégrale converge et vaut $G(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).
On va utiliser la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$. Dans tout l'exercice on fixe $t \in \mathbb{R}^*$.

a. Justifier le fait que f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer que $\int_{-R}^{R} f(x+it)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x - i\int_0^t f(-R+ix)\mathrm{d}x + i\int_0^t f(R+ix)\mathrm{d}x$.
On utilisera un lacet dans le plan complexe, que l'on pourra déterminer en examinant quel ensemble de $\mathbb{C}$ la variable de f parcourt dans chacune des quatre intégrales ci-dessus.

c. Montrer que $\left|\int_0^t f(R+ix)\mathrm{d}x\right| \leq e^{-R^2}\int_0^t e^{x^2}\mathrm{d}x$.

d. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'intégrale $\int_{-R}^{R} f(x+it)\mathrm{d}x$ a une limite quand $R \to +\infty$ et préciser la valeur de la limite.

e. En déduire la valeur de $G(t)$.

Exercice 3. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$.
On fixe $a, b \in D(0,1)$ et on pose $f(z) = (z-a)^{-1} - (z-b)^{-1}$ pour tout $z \neq a, b$.

a. (i) Soit γ un circuit dans Ω. Faire un dessin.
Que peut-on dire de $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(b)$? Justifier par un argument topologique.

(ii) Montrer que f admet une primitive F sur Ω.
En admet-elle une sur $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$?

(iii) Montrer que $\frac{z-a}{z-b}\exp(-F(z))$ est constant sur Ω.

b. (i) Montrer qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\exp(g(z)) = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.

(ii) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(z)^n = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.

c. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que ses racines complexes a_1, ..., a_n appartiennent à $D(0,1)$. Montrer qu'il existe $r : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $r(z)^n = P(z)$ sur Ω.