Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2024-2025
Mathématiques
Analyse Complexe

Contrôle Continu n°2

Durée : 3h. Les exercices sont indépendants.
On apportera un soin particulier à la précision des arguments et justifications.
Tous documents et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \leq -1 \text{ ou } t \geq 1\}$.
On cherche à montrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$\forall z \in \Omega \quad z\cos(f(z)) = \sin(f(z)) \tag{1}$$

a. Représenter Ω sur un dessin, justifier que c'est un ouvert étoilé.
Existe-t-il un nombre complexe w tel que $\cos(w) = 0$ et $\sin(w) = 0$?

b. Montrer que si f vérifie (1) on a $f'(z) = 1/(1+z^2)$ sur Ω. *On pourra dériver* (1).

c. Montrer que $1/(1+z^2)$ admet une primitive g sur Ω telle que $g(0) = 0$.

d. Montrer que g vérifie (1) sur $\mathbb{R}$. *On pourra reconnaître une fonction usuelle.*

e. Montrer que g vérifie (1) sur Ω.

Exercice 2. Soit P un polynôme non constant dont on note $a_1, \dots, a_n$ les racines complexes.

a. On considère le cas $P(z) = (z+1)(z-2)^2$. Déterminer les pôles et résidus de $1/P$.

On revient au cas général et on suppose maintenant que toutes les racines de P sont simples.

b. On fixe $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $1/P$ admet un pôle simple en a_i avec résidu $1/P'(a_i)$.

Les questions c et d sont indépendantes et utilisent le résultat de la question b (qu'on pourra admettre).

c. On pose $R(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)(z-a_i)}$.

(i) Montrer que $R - 1/P$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(ii) Montrer que $R - 1/P$ est bornée sur $\mathbb{C}$. En déduire que $1/P = R$.

d. On suppose toujours que P est à racines simples, et de plus que $n = \deg(P) \geq 2$.

(i) Justifier l'existence de constantes C, $D > 0$ telles que $|P(z)| \geq C|z|^n$ dès que $|z| \geq D$.

(ii) Soit γ_r le cercle de centre 0 et rayon r, parcouru une fois dans le sens direct.
Montrer que $\int_{\gamma_r} \mathrm{d}z/P(z) \to 0$ quand $r \to +\infty$.

(iii) En déduire que $\sum_{i=1}^{n} 1/P'(a_i) = 0$.

suite au verso

Exercice 3. Pour $t > 0$ on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t, et $\rho(t) = t^{-1} - \lfloor t^{-1} \rfloor$ la partie fractionnaire de t^{-1}. On admet dans la suite que ρ est mesurable. On a bien sûr $0 \leq \rho(t) \leq 1$ pour tout $t > 0$. On notera que ρ n'admet pas d'« équivalent simple » en 0.

On note $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ et on considère les fonctions :

$$F : \Omega_0 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^1 \rho(t) t^{z-1} \mathrm{d}t,$$
$$\zeta : \Omega_1 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

a. *(question « de cours »)* Montrer que ζ est holomorphe sur Ω_1.

b. (i) On fixe $z \in \Omega_0$. Montrer que la fonction $(t \mapsto \rho(t) t^{z-1})$ est intégrable sur $]0, 1]$.
Ainsi F est bien définie.

(ii) Soit $K \subset \Omega_0$ un compact. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geq \alpha$ pour tout $z \in K$.

(iii) Montrer que F est holomorphe sur Ω_0 en appliquant un théorème du cours.

c. On fixe $x > 1$. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} & \text{si } nt \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 f_n(t) \mathrm{d}t$ en fonction de n et x.

(ii) On fixe $t > 0$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \lfloor t^{-1} \rfloor t^{x-1}$.

(iii) En déduire que $\frac{1}{x}\zeta(x) = \frac{1}{x-1} - F(x)$ pour $x > 1$.

d. (i) Montrer qu'on a $\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - zF(z)$ pour tout $z \in \Omega_1$.

(ii) Montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur Ω_0 avec un unique pôle en $z = 1$, dont on précisera l'ordre et le résidu.