Devoir Surveillé
29 novembre 2024

Dans ce sujet les fonctions mathématiques f, g, ..., sont implémentées par des procédures Python `f(x)`, `g(x)`, ..., qui renvoient la valeur de la fonction étudiée au point `x`. Les procédures demandées doivent être écrites en code python clairement lisible (notamment l'indentation).

Exercice 1.

a. Que fait la procédure `Mystère` suivante ? Quel nom porte cette méthode ?

```
def Mystère(f,a,b,y):
    x = (a+b)/2
    while b-a > 1e-10:
        if (f(a)-y)*(f(x)-y) < 0: b = x
        else: a = x
        x = (a+b)/2
    return x
```

Proposer une modification de cette procédure qui réalise moins d'appels à la fonction `f`.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La méthode de Newton consiste à rechercher un zéro de f en l'approchant par une suite $(x_k)_k$ définie par récurrence. Faire un schéma pour expliquer graphiquement comment x_{k+1} est défini en fonction de f et x_k. Donner la relation de récurrence correspondante.

c. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $h' > 0$. La méthode de Halley est une variante de la méthode de Newton qui converge encore plus rapidement, sous de bonnes hypothèses sur la fonction h. Plus précisément, elle consiste à appliquer la méthode de Newton à la fonction $f = h/\sqrt{h'}$. Écrire la relation de récurrence $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ correspondante, en fonction de h, h' et h''.

d. Écrire une procédure `Halley(h,k,l,a,b)` qui renvoie un zéro de `h` dans l'intervalle [`a`,`b`] à l'aide de la méthode de Halley, en partant du point `x = (a+b)/2`. Les arguments `k` et `l` seront utilisés pour fournir à la procédure la dérivée et la dérivée seconde de `h`. Plus précisément, la procédure retournera un réel `x` $\in$ [`a`,`b`] tel que `abs(h(x)) < 1e-10`. Si la méthode itérative fait sortir de l'intervalle [`a`,`b`] ou mène à une division par zéro, la procédure retournera `None`.

Exercice 2.

a. Soit $X = (x_0, \ldots, x_n)$ une liste strictement croissante de réels, et $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ une fonction.
Rappeler la définition du polynôme P d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots, x_n$: on donnera une formule pour P, et la propriété fondamentale que vérifie P vis-à-vis de f.
Écrire une procédure `Lagrange(f,X,x)` qui calcule la valeur P(`x`). Le premier argument `f` est une fonction python qui calcule les valeurs de f. *On pourra utiliser une procédure auxiliaire comme vu en TP, ou pas. On ne demande pas d'optimiser la complexité de la procédure.*

b. On note $P_{f,a,b}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux **trois** points a, $(a+b)/2$ et b. Étant données f et $X = (x_0, \ldots, x_n)$ comme à la question précédente, on définit la fonction $g : [x_0, x_n[\to \mathbb{R}$ « de degré 2 par morceaux » comme suit : $g(x) = P_{f,x_i,x_{i+1}}(x)$, où i est l'entier tel que $x \in [x_i, x_{i+1}[$.
Écrire une procédure `L2M(f,X,x)` qui calcule la valeur $g(x)$, où g est associée à `f` et `X` comme ci-dessus. Cette procédure pourra appeler la procédure `Lagrange` de la question précédente.

c. Si on calcule l'intégrale sur $[x_0, x_n]$ de la fonction g introduite à la question précédente, lorsque les points x_i sont régulièrement espacés entre x_0 et x_n, on obtient une approximation de l'intégrale de f sur $[x_0, x_n]$. Quel nom porte cette méthode d'intégration numérique ? (On ne demande pas de donner la formule correspondante.)
Expliquer avec un schéma la méthode des trapèzes et donner la formule pour les quantités $I_n^1(f)$ qui approximent $\int_{x_0}^{x_n} f(t)\mathrm{d}t$ par cette méthode.

d. La fonction g de la question c. n'est pas dérivable aux points d'interpolation. Pour remédier à ce problème, on va remplacer $P_{f,a,b}$ par l'unique polynôme $H_{f,a,b} := H$ de degré 3 tel que $H(x) = f(x)$ **et** $H'(x) = f'(x)$ aux points $x = a$ et $x = b$. On admet l'existence et l'unicité d'un tel polynôme (interpolation de Hermite).
Écrire une procédure `Hermite(f,g,a,b,x)` qui renvoie la valeur $H_{f,a,b}(x)$ (l'argument `g` étant utilisé pour passer la dérivée de `f`).
On cherchera H sous la forme $H(x) = C(x-a)^2 + D(x-b)^2 + E(x-a)^2(x-b) + F(x-b)^2(x-a)$, où C, D, E, F sont des constantes. On déterminera d'abord C et D en fonction de f, a, b en écrivant les équations $H(a) = f(a)$, $H(b) = f(b)$. Puis on déterminera E et F en fonction de f, a, b, ce qui permet enfin d'écrire la procédure.