Fonctions holomorphes

Exercice 1. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{2-i}{1+3i}; \qquad \frac{(2-i)(1+3i)}{3+2i}; \qquad (1+i)^7; \qquad (\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^{-5}.$$

Exercice 2. Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ définis par les conditions suivantes :

$$|z-3i| \leq |z-3|; \qquad |z-i| < 3; \qquad \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) < 1; \qquad \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2.$$

Exercice 3. Rappelons qu'on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); \qquad \sin(z) = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \qquad \mathrm{ch}(z) = \tfrac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}); \qquad \mathrm{sh}(z) = \tfrac{1}{2}(e^{z} - e^{-z});$$

et que les fonctions ainsi définies sur $\mathbb{C}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec les fonctions connues.

a. Montrer qu'on a $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Relier $\mathrm{ch}(z)$ et $\mathrm{sh}(z)$ à $\cos(iz)$ et $\sin(iz)$.

b. Montrer qu'on a $\cos(x+iy) = \cos(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
Donner les formules analogues pour $\sin(x+iy)$, $\mathrm{ch}(x+iy)$, $\mathrm{sh}(x+iy)$.

c. Montrer que pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$ on a $|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = \mathrm{ch}(2y)$.
Cette quantité est-elle bornée quand z varie dans $\mathbb{C}$?

d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\cos(z) = 0$, $\sin(z) = 0$.

Exercice 4.

a. Montrer que pour $u = e^{it}$ et $w = re^{i\theta} \neq u$ on a les formules suivantes pour le *noyau de Poisson* :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{u+w}{u-w}\right) = \frac{1-|w|^2}{|u-w|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

b. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Vérifier que la *transformation de Cayley* ci-dessous est une bijection de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{D}$ dont on donnera la bijection réciproque :

$$W(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Vérifier que la même formule réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T} \setminus \{1\}$.

c. Montrer la formule suivante, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = W(\lambda)$, $z \in \mathbb{H}$, $w = W(z)$: $\quad i\dfrac{u+w}{u-w} = \dfrac{1+\lambda z}{\lambda - z}$.

Exercice 5. On définit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en posant $f(x+iy) = x + iy^2$.

a. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$. Calculer $df(x_0, y_0)$ pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

b. f est-elle $\mathbb{C}$-dérivable en 0 ? *On calculera $f(z)/z$ sur l'axe des abscisses, et sur l'axe des ordonnées.*

c. À l'aide des équations de Cauchy-Riemann, déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ en lesquels f est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On pose $u = \mathrm{Re} \circ f$, $v = \mathrm{Im} \circ f$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. f est constante ; b. u est constante ; c. v est constante ;
d. $\bar{f}$ est holomorphe ; e. $|f|$ est constante.

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On note $u = \mathrm{Re} \circ f$, $v = \mathrm{Im} \circ f$. On fixe $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. On considère les courbes de niveau $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ de u et v respectivement passant par z_0.

a. Dire pourquoi on ne peut pas avoir $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ au point z_0.

b. Rappeler les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ au point z_0, en fonction des dérivées partielles de u et v.

c. Montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

Exercice 8. On cherche les fonctions f, holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, telles que $\mathrm{Re} \circ f = u$, où $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est donnée par la formule $u(x+iy) = x + x/(x^2+y^2)$.

a. Écrire les équations de Cauchy-Riemann pour f, et en déduire les dérivées partielles de $v = \mathrm{Im} \circ f$ par rapport à x et à y.

b. On fixe y. Déterminer la fonction $(x \mapsto v(x+iy))$ à une constante près. On note $C(y)$ cette constante.

c. Déterminer $C(y)$. Quelles sont les fonctions f répondant au problème ?

d. Donner une expression simple pour ces fonctions f en fonction de la variable z.

De même, déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re} \circ f(x+iy) = 2xy$.

Exercice 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{C}$. Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert tel que la fonction $G : \Delta \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta)$ soit bien définie. *On dit parfois que G est une expression de F en coordonnées polaires, et on note même parfois $F(r,\theta) = G(r,\theta)$.*

On suppose que $0 \notin \Omega$ et que F est différentiable sur Ω. À quelle condition sur les dérivées partielles de G la fonction F est-elle holomorphe ? Donner la version polaire des équations de Cauchy-Riemann.

Exercice 10. On définit une fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$F(x+iy) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}.$$

On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

a. Montrer qu'on a $F(z)^2 = z$ sur $\bar{\Omega}$.

b. Montrer que F est différentiable sur Ω.

c. Déterminer une expression polaire de F sur Ω.
Se référer à l'exercice précédent et prendre $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[$.

d. Montrer que F est holomorphe sur Ω. Calculer $F'(z)$ en fonction de $F(z)$.

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\left(\sum_n \frac{n^3}{(n-1)!}(z-i)^n\right); \qquad \left(\sum_n (1+i)^n z^n\right); \qquad \left(\sum_n \frac{2^n+i}{3^n-i} z^{2n}\right); \qquad \left(\sum_n \frac{(3n)!}{(n!)^3}(z+1)^{3n}\right).$$

Exercice 12. Déterminer le DSE en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right); \qquad g(x) = \frac{4}{x^2-2x+2}; \qquad h(x) = (\ln(1-x))^2; \qquad k(x) = e^x\cos(x).$$

On précisera les domaines de définition des fonctions et les rayons de convergence de leur DSE.
Pour h on exprimera les coefficients du DSE en fonctions des sommes harmoniques $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 13. Déterminer les couronnes ouvertes de convergence des séries de Laurent suivantes (avec $a \in \mathbb{C}^*$ fixé) :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^k + \delta_{k>0}) z^k\right); \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{z^k}{\cosh(k)}\right); \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{z^k}{1+k^2}\right); \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{|k|} z^k\right).$$

Exercice 14.

a. Développer la fonction $f : z \mapsto 1/(z-1)(z-2)$ en série de Laurent dans :
i) le disque $D(0,1)$; ii) la couronne $A(0,1,2)$; iii) la « couronne » $A(0,2,+\infty)$.

b. Développer la fonction $f : z \mapsto 1/(1-z)^2$ en série de Laurent dans :
i) le disque $D(0,1)$; ii) la « couronne » $A(0,1,+\infty)$.

c. Développer la fonction $f : z \mapsto 1/(z+2)(z-1)$ en série de Laurent autour de -2 dans :
i) le disque épointé $D'(-2,3)$; ii) la « couronne » $A(-2,3,+\infty)$.

Exercice 15.

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum_n n^2 z^n\right)$? On note f sa somme.

b. Rappeler le DSE en 0 de $g : z \mapsto (1-z)^{-1}$.

c. À l'aide du théorème de dérivation des séries entières, calculer f.

d. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^\infty n^2/2^n$, $\sum_{n=0}^\infty n^2/(1+i)^n$.