Intégrales et Primitives

Exercice 1. Calculer $\int_\gamma \bar{z}^2 \mathrm{d}z$ dans les cas suivants :

a. γ est le segment orienté $[0, 2i]$;

b. γ est le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens direct ;

c. γ est l'arc de parabole $y = x^2$ parcouru de 0 à $1+i$.

Exercice 2. Soit γ le cercle unité, parcouru une fois dans le sens direct. On pose $f_n(z) = z^{-1}(z+z^{-1})^{2n}$, pour $z \in \mathbb{C}^*$.

a. Rappeler la valeur de $\int_\gamma z^k \mathrm{d}z$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

b. En développant, montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \binom{2n}{n}$.

c. En notant que $z + z^{-1} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ sur γ^*, montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \frac{2^{2n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos t)^{2n}\mathrm{d}t$.

d. En déduire la valeur de l'intégrale de Wallis $W_{2n} = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2n}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ un chemin. On définit $\delta : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ en posant $\delta(t) = \gamma(t)^{-1}$. Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ on a

$$\int_\gamma f\left(\tfrac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = -\int_\delta \frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z.$$

Qu'obtient-on dans le cas où γ est le cercle unité ?

Exercice 4. Calculer $\int_\gamma \mathrm{d}z/z$ où γ est le carré de sommets $\pm 1 \pm i$ parcouru une fois dans le sens direct. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. Calculer directement $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z$, où γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Refaire le calcul en utilisant l'identité $2\,\mathrm{Re}(z) = z + z^{-1}$ sur le cercle unité.

Exercice 6. On fixe a, $b > 0$. À l'aide de l'indice de 0 par rapport à l'ellipse $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto a\cos(t) + ib\sin(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2}.$$

Exercice 7.
Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'indices par rapport au lacet γ de certains points bien choisis :

$$\int_\gamma \frac{(2+i)z^2 - 2z + i}{z^3 - z^2 + z - 1}\mathrm{d}z.$$

On commencera par décomposer l'intégrande en éléments simples.

Exercice 8. Calculer $\int_\gamma z e^{z^2}\mathrm{d}z$ dans les cas suivants :

a. γ est le segment orienté $[0, 1+i]$;

b. γ est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ parcouru une fois de 0 à $1+i$.

Exercice 9. On fixe a, $b \in \mathbb{C}^*$. Déterminer les primitives sur $\mathbb{C}^*$ de ze^{az}, $e^{az}\cos(bz)$.

Exercice 10. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ et $f(z) = 1/(1+z^2)$ pour $z \neq \pm i$.

a. Développer f en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer que $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout circuit γ dans Ω.

c. Montrer que f admet une unique primitive F dans Ω telle que $F(1) = \pi/4$.

d. On a bien sûr $F(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Et pour $x \in \mathbb{R}_-^*$?

e. f admet-elle une primitive sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$? sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$? Justifier.

Exercice 11. Pour $R > 0$ on considère le lacet γ_R formé par le « bord » du secteur angulaire $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct. On note δ_R l'arc de cercle $\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct. Ainsi γ_R est la concaténation de deux segments dans le plan complexe et de δ_R.

a. Pourquoi la fonction $f : z \mapsto \exp(iz^2)$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}$? Combien vaut $\int_{\gamma_R} \exp(iz^2)\mathrm{d}z$?

b. À l'aide de la question précédente, montrer que $\int_{\delta_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z = e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^R e^{it^2}\mathrm{d}t$.

c. Montrer que $\left|\int_{\delta_R} \exp(iz^2)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})$.
On pourra utiliser l'inégalité $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ *valable sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

e. En déduire les valeurs des *intégrales de Fresnel* $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

Exercice 12. On note Log la détermination principale du logarithme.

a. Combien vaut $\mathrm{Log}(e^{i\pi/2}e^{3i\pi/4})$?

b. Pour $z = e^{2i\pi/3}$, comparer $\mathrm{Log}(z^2)$ et $2\,\mathrm{Log}(z)$.

c. Pour $z = 3 + 4i$, combien vaut $\mathrm{Log}(\exp(z))$?

d. Montrer que si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\mathrm{Re}(z') > 0$ alors $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$.

e. Pour quels nombres complexes z a-t-on $\mathrm{Log}(\exp(z)) = z$?

Exercice 13. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f(z)^p = z$ pour tout $z \in \Omega$.

a. Montrer que si f est une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. En déduire que $0 \notin \Omega$.

b. Montrer que s'il existe une détermination du logarithme sur Ω, alors il existe une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω.

c. Montrer que s'il existe une détermination f_1 de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω *connexe* alors il en existe exactement p, que l'on explicitera en fonction de f_1.

d. Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt[3]{\cdot}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ telle que $f(1) = 1$. Combien vaut $f(i^3)$?

e. Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt{\cdot}$ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $f(-1) = i$. Déterminer $f(\Omega)$.

Exercice 14. Pour tous $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $w \in \mathbb{C}$ on pose $z^w = \exp(w\,\mathrm{Log}(z))$, où Log est la détermination principale du logarithme.

a. Calculer i^i, $\mathrm{Re}((1+i)^i)$.

b. Pour $z = e^{3i\pi/4}$, comparer z^{2i}, $(z^2)^i$ et $(z^i)^2$.

c. Calculer $\mathrm{d}z^w/\mathrm{d}z$.