Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2024-2025
Mathématiques
Analyse Complexe

Formule de Cauchy et applications

Exercice 1. On note γ le cercle de centre 1 et rayon 5, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer :

$$I = \int_\gamma \frac{z^2+5z}{z-2}\mathrm{d}z, \quad J = \int_\gamma \frac{z^2-12}{(z-i)(z+5)}\mathrm{d}z, \quad K = \int_\gamma \frac{z^2+z}{(z-2i)(z+3)}\mathrm{d}z.$$

On note δ le cercle de centre 0 et rayon 2, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer :

$$L(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z, \quad M = \int_\delta \frac{z^2+3}{(z-1)^2}\mathrm{d}z, \quad N = \int_\delta \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z.$$

Exercice 2. On note γ le cercle trigonométrique, parcouru une fois dans le sens direct.

a. Rappeler la formule de Cauchy pour les dérivées.

b. Montrer qu'on a

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\mathrm{d}z.$$

c. En déduire que la série $\sum_n \binom{2n}{n} 5^{-n}$ converge et l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{5\mathrm{d}z}{3z-1-z^2}. \tag{1}$$

d. Décomposer $5/(3z-1-z^2)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et en déduire une expression simple de (1).

Exercice 3. On rappelle que le n^{e} polynôme de Chebyshev T_n est l'unique polynôme de degré n véfifiant l'identité $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, et que ses racines sont les points $x_k^{(n)} = \cos(\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2}))$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

a. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $[-1,1]$ et γ un lacet dans $\Omega \setminus [-1,1]$ tel que $\mathrm{Ind}_\gamma(x) = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

   (i) On considère la fonction $P_n(z) = (2i\pi)^{-1}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\frac{T_n(w)-T_n(z)}{T_n(w)}\mathrm{d}w$ définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Montrer que P_n est un polynôme de degré $n-1$.

   (ii) Montrer qu'on a $P_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ainsi P_n est le *polynôme d'interpolation de Lagrange aux points de Chebyshev* pour f.

   (iii) On fixe $x \in [-1,1]$. Donner une formule intégrale pour $f(x) - P_n(x)$. En déduire que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{L(\gamma)\|f\|_{\infty,\gamma^*}\|T_n^{-1}\|_{\infty,\gamma^*}}{2\pi\ d([-1,1]\,,\gamma^*)}.$$

On va maintenant prendre un lacet explicite γ et montrer que $\|T_n^{-1}\|_{\infty,\gamma^*} \to_n 0$. On aura ainsi montré que pour toute fonction analytique sur $[-1,1]$ les polynômes d'interpolation de f aux points de Chebyshev convergent uniformément vers f sur $[-1,1]$. Ce résultat reste vrai avec des hypothèses beaucoup plus faibles — par exemple il suffit que f soit de classe C^1 — mais il existe des fontions f continues pour lesquelles il est faux.

b. On note $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, w \mapsto \frac{1}{2}(w + w^{-1})$. On note $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.

   (i) Montrer que pour tout n et tout $w \in \mathbb{C}^*$ on a $T_n(\varphi(w)) = \varphi(w^n)$.

   (ii) Calculer $\varphi(re^{i\theta})$ sous forme cartésienne. Décrire $E_r := \varphi(S_r)$ pour $r > 1$.

   (iii) Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert contenant $[-1,1]$ on peut trouver $r > 1$ tel que $E_r \subset \Omega$.

   (iv) Montrer que pour tout n et pour tout $z \in E_r$ on a $|T_n(z)| \geq \frac{1}{2}(r^n - r^{-n})$. Conclure.

Exercice 4.

a. Soit f une fonction entière telle que $f(z) = O(z^n)$ en $+\infty$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n. On pourra s'inspirer du cas $n = 0$.

b. Soit f une fonction entière telle que $C|z|^\alpha \leq |f(z)| \leq D|z|^\alpha$ pour tout $|z| \geq R$. Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit f, g deux fonctions entières, non identiquement nulles, telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit z_0 un zéro de g. Montrer que z_0 est également un zéro de f, avec au moins la même multiplicité.

b. Étudier la limite de $f(z)/g(z)$ lors que $z \to z_0$.

c. Montrer que f et g sont proportionnelles.

Exercice 6. Soit f, g deux fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, qui ne s'annulent pas sur Ω. On suppose qu'on a $f'(z_n)/f(z_n) = g'(z_n)/g(z_n)$ pour une suite de points deux-à-deux distincts $z_n \in \Omega$ qui converge dans Ω. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 7. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $a = \exp(2i\pi t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tel que $f(az) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

a. Montrer qu'il existe $\varphi :]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\to \mathbb{C}$ telle que $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)$ pour tout $r \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. On suppose que f est holomorphe sur U. On considère $g : z \mapsto zf'(z) - f'(1)$.

(i) Montrer que $g(a^n) = 0$ pour tout n. *On commencera par le cas* $n = 1$.
En déduire que g est identiquement nulle.

(ii) La fonction z^{-1} admet-elle une primitive sur U ? En déduire que f est constante.

c. Les conclusions des questions précédentes subsistent-elles si $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à $\mathbb{R}$; autrement dit on a $\bar{\Omega} = \Omega$.
On note $\Omega_+ = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\Omega_- = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pour tout $z \in \Omega$.

a. Montrer que g est holomorphe sur Ω.
Plusieurs méthodes sont possibles, il est possible de faire très simple !

b. On suppose que Ω est connexe.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ tel que $I \subset \Omega$.
On peut admettre le résultat de cette question et traiter la dernière question.

c. On suppose que Ω est connexe et que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$.
Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 9. On fixe un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

a. Montrer que si f ne s'annule pas et $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors f est constante.

b. Montrer que si f est non constante et $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors ce minimum est nul.

Exercice 10.
On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On fixe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. On définit une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ en posant $g(0) = f'(0)$ et $g(z) = f(z)/z$ pour $z \neq 0$.

a. Montrer que g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et continue en 0.

b. Montrer que g est holomorphe sur Ω.
Plusieurs arguments sont possibles, en utilisant la question précédente ou pas.

c. On pose $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Montrer que pour $0 < r < 1$ on a $\sup_{z \in D_r} |g(z)| \leq 1/r$.

d. En déduire qu'on a $|f'(0)| \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Omega$.

e. On suppose de plus qu'il existe $z_0 \in \Omega \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, ou que $|f'(0)| = 1$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \Omega$.