

FONCTIONS Γ ET ζ

La fonction Γ d'Euler est définie par la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Exercice 1. Notons $\Omega_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -k, z \notin -\mathbb{N}\}$.

- a. (i) Rappeler la définition de t^z , pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Donner les valeurs des dérivées de cette expression par rapport à z et à t . Discuter l'existence et la valeur de la limite quand $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow 0^+$.
- (ii) Montrer que la fonction Γ est bien définie sur Ω_0 .
- (iii) Montrer que la fonction Γ est holomorphe sur Ω_0 . Donner une formule intégrale pour $\Gamma^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On mettra en œuvre le théorème d'holomorphic sous l'intégrale, avec domination sur tout compact de Ω .
- b. (i) Montrer que pour tout $z \in \Omega_0$ on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (ii) Montrer par récurrence sur n que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 On pourra utiliser l'équation fonctionnelle obtenue à la question précédente.
- (iii) Montrer que le prolongement holomorphe de Γ à Ω_n est unique pour tout n .
 On peut alors étendre Γ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
- c. (i) On utilisant le DSE de \exp en 0, montrer que pour tout $z \in \Omega_0$ on a

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

On justifiera soigneusement l'interversion !

- (ii) À l'aide de la question précédente, retrouver l'existence du prolongement holomorphe de Γ à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
On mettra en œuvre les théorèmes d'holomorphic sous l'intégrale et de convergence normale sur tout compact.
- (iii) Montrer que Γ admet un pôle simple en $-n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer le résidu correspondant.

Exercice 2.

- a. On considère le rectangle γ_R de sommets $-R, R, R+2i\pi, -R+2i\pi$, parcouru une fois dans cet ordre, et la fonction $f : z \mapsto e^{az}/(1+e^z)$, pour $a \in]0, 1[$ fixé.
 - (i) Déterminer les pôles et résidus de f .
 - (ii) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) = r \neq 0$ on a $|f(z)| \leq e^{ar}/|1-e^r|$. Déterminer la limite de ce majorant lorsque $r \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow -\infty$.
 - (iii) Appliquer le théorème des résidus à f sur γ_R et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

- b. (i) À l'aide du changement de variable $t \leftarrow st$, montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a

$$e^{-s} s^{x-1} \Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} e^{-s(1+t)} t^{-x} dt.$$

- (ii) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{-x}}{1+s} ds$.
- c. (i) À l'aide des questions précédentes, démontrer la *formule des compléments* pour $x \in]0, 1[$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

- (ii) Montrer que la formule des compléments est valable sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
- (iii) En déduire que Γ ne s'annule pas, puis que $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction entière.
 Retrouver la nature des singularités de Γ aux entiers négatifs et les valeurs des résidus correspondant.

La fonction ζ de Riemann est définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice 3.

- a. Montrer que ζ est définie et holomorphe sur $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$.
On mettra en œuvre le théorème de convergence normale sur tout compact.
- b. Montrer que pour tout $s > 1$ on a

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

- c. En déduire l'expression intégrale, pour $s > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

- d. Montrer que l'intégrale à paramètre $\int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$ définit une fonction entière de s .
On mettra en œuvre le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec domination sur tout compact de Ω .
- e. Montrer que la fonction $z/(e^z - 1)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence correspondant. On note $B_n/n!$ les coefficients du DSE :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

- f. On fixe $s > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} B_n t^{n+s-2}/n!$ converge normalement pour $t \in [0, 1]$.
- g. En déduire l'expression, pour $s > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!(n+s-1)} + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

- h. Montrer que $\zeta(s)\Gamma(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (1 - \mathbb{N})$.
On mettra en œuvre le théorème de convergence normale sur tout compact.
- i. À l'aide des exercices précédents, montrer que ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (1 - \mathbb{N})$, puisque les singularités de ζ dans $-\mathbb{N}$ sont artificielles. La fonction ζ se prolonge donc holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
 Calculer les valeurs $\zeta(-n)$, $n \in \mathbb{N}$ en fonction des *nombres de Bernoulli* B_n .