Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2024-2025
Mathématiques
Analyse Complexe

Fonctions méromorphes et résidus

Exercice 1. Les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée en 0. Déterminer la nature de ces singularités.

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z}, \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad h(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z-1)}, \quad k(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Exercice 2. Déterminer les pôles des fonctions suivantes, les parties singulières et les résidus correspondant :

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2+4}, \quad g(z) = \frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}, \quad h(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2 z}, \quad k(z) = \frac{\cos z}{(\sin z)^2}.$$

Pour f avec pôle en a et h holomorphe au voisinage de a, a-t-on $\operatorname{Res}_{hf}(a) = h(a)\operatorname{Res}_h(a)$? On distinguera selon l'ordre du pôle a.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes (où $a > 0$) à l'aide du théorème des résidus :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}, \quad J(a) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, \quad K(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 4. On pose $f(z) = 2e^{iz}/(e^z + e^{-z})$. Pour tout $R > 0$ on considère le rectangle γ_R de sommets $-R$, R, $R + i\pi$, $-R + i\pi$, parcouru une fois dans cet ordre.

a. Justifier le fait que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.
Déterminer ses singularités. Calculer son résidu en $i\pi/2$.
b. Monter que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $R > 0$ on a $|f(R+it)| \leq 2e^{-t}/(e^R - e^{-R})$.
c. Déterminer la valeur de $\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ à l'aide du théorème des résidus.
d. Montrer que $\int_{[R,R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
De même $\int_{[-R,-R+i\pi]} f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
e. À l'aide des questions précédentes, déterminer la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{it}}{e^t + e^{-t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Pour tout entier positif N on note γ_N le carré de sommets $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, parcouru une fois dans le sens positif. On considère la fonction cotangente définie sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

On fixe de plus une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec pôles non entiers et en nombre fini, et telle que $f(z) = O(|z|^{-2})$.

a. (i) Étudier les singularités de $\pi\cot(\pi z)$ et déterminer les résidus correspondant.
(ii) Montrer qu'il existe une constante A_1 telle qu'on ait $|\cot(\pi z)| \leq A_1$ pour tout $z \in \pm(N + \frac{1}{2}) + i\mathbb{R}$.
(iii) Montrer qu'il existe une constante A_2 telle qu'on ait $|\cot(\pi z)| \leq A_2$ pour tout $z \in \mathbb{R} \pm i(N + \frac{1}{2})$.
b. (i) Montrer que $\int_{\gamma_N} \pi\cot(\pi z)f(z)\mathrm{d}z$ tend vers 0 quand $N \to \infty$.
(ii) On note $R(a)$ les résidus de $\pi\cot(\pi z)f(z)$ aux pôles $a \in A$ de f.
À l'aide du théorème des résidus, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{a \in A} R(a).$$

c. Application. Montrer qu'on a, pour $a \neq 0$ resp. $a \notin \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi a)^2}.$$