TP 1 : Méthodes dichotomiques

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. On cherche à trouver un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. On construit par récurrence deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$. Puis, a_n et b_n étant construits, on pose $x_n = (a_n + b_n)/2$. Si $f(a_n)f(x_n) \leq 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$, sinon on pose $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors les deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ convergent vers un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

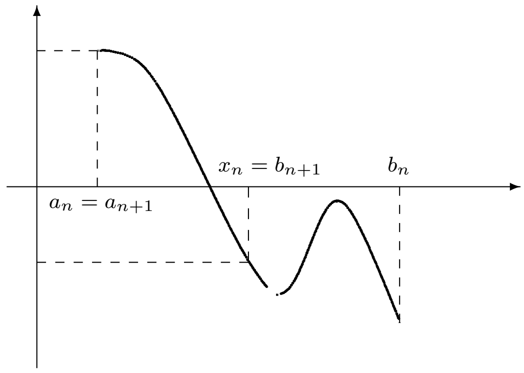

Figure 1 – $f(a_n)f(x_n) < 0$

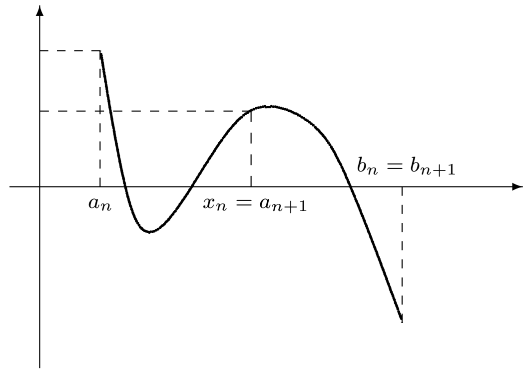

Figure 2 – $f(a_n)f(x_n) > 0$

On importera le module math en tapant `from math import *` en début de TP et on utilisera $|x| <$ prec pour tester $x = 0$, avec prec $= 10^{-15}$ (précision machine). Toute fonction mathématique sera définie comme une procédure Python.

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `Dichotomie(f,a,b,p)` qui calcule par dichotomie un zéro d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec précision p.
b. Utiliser votre procédure `Dichotomie` pour calculer $\sqrt{3}$ avec précision $p = 10^{-10}$ en partant d'une fonction f et d'un intervalle $[a, b]$ judicieusement choisis. Vérifier que le carré du résultat obtenu vaut bien 3.
c. Vous êtes-vous assuré que votre procédure ne calcule jamais deux fois l'évaluation de f au même point ? Avez-vous traité le cas où $f(a_n)f(x_n) = 0$? Dans le cas contraire, faites les modifications nécessaires afin d'optimiser le temps de calcul.

Exercice 2.

a. Montrer que, sous les hypothèses faites, f admet bien un zéro dans l'invervalle $[a, b]$.
b. Montrer que les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ convergent vers un zéro de f dans $[a, b]$. Pour cela on pourra :
   (i) Montrer que pour tout n on a $|a_n - b_n| = |a - b|/2^n$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.
   (ii) Montrer que les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sont monotones puis qu'elles convergent vers la même limite x.
   (iii) Exprimer $f(x)^2$ comme une limite et conclure.

La méthode de Lagrange est une variante de l'algorithme de dichotomie précédent qui consiste à prend pour x_n l'abscisse de l'intersection de la droite (A_nB_n) avec l'axe des abscisses, où $A_n = (a_n, f(a_n))$ et $B_n = (b_n, f(b_n))$.

Exercice 3.

a. Écrire l'équation de la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.
b. Écrire une procédure `Lagrange(f,a,b,p)` qui calcule avec la méthode de Lagrange un zéro d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec précision p.
c. Introduire un compteur dans vos procédures pour pouvoir comparer le nombre d'itérations.
   Quel est le lien avec le nombre de calculs de valeurs de f ?
d. Comparer vos procédures avec $f(x) = x^2 - 3$, en considérant $p = 10^{-10}$ et $[a, b] = [1, 2]$.
e. Même question, mais avec l'intervalle $[a, b] = [1, 5]$.
   Que constate-t-on ? Proposez une explication en vous aidant d'un dessin.
   Peut-on *a priori* privilégier une méthode plutôt qu'une autre ?

Exercice 4. À l'aide de la librairie `mathplotlib` et de votre procédure `Dichotomie`, tracer le graphe de la fonction racine carrée sur $[0, 4]$. On pourra calculer par exemple 100 valeurs de la fonction. Combien de carrés a-t-on calculé ?