

TP 5 : INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Pour calculer de manière approchée l'intégrale de f sur $[a, b]$, on approxime l'aire sous la courbe par celle de n rectangles de largeur $(b - a)/n$ et de hauteur donnée par la valeur de f à gauche de chaque intervalle. On note $I_n^0(f, a, b)$ la valeur obtenue par cette *méthode des rectangles*, qui est également la n^{e} somme de Riemann à gauche avec pas constant pour cette intégrale. On peut procéder de même en remplaçant les rectangles par des trapèzes, cf les figures ci-dessous. On note $I_n^1(f, a, b)$ la valeur approchée obtenue par la *méthode des trapèzes*.

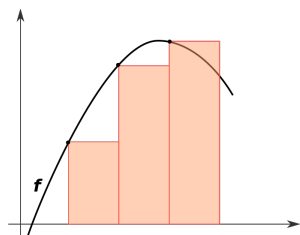


FIGURE 1 – Rectangles

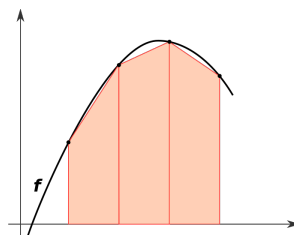


FIGURE 2 – Trapèzes

Dans la méthode des rectangles (resp. des trapèzes) on approche f par une fonction constante par morceaux (resp. affine par morceaux). De manière analogue, on peut approcher f sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux trois points x_i , $(x_i + x_{i+1})/2$ et x_{i+1} , qui est de degré 2. C'est la *méthode de Simpson*¹. En calculant l'intégrale de ces polynômes sous chaque sous-intervalle, on obtient la formule suivante pour les valeurs approchées $I_n^2(f, a, b)$ correspondantes, où les x_i sont les $n + 1$ points régulièrement espacés dans $[a, b]$:

$$I_n^2(f, a, b) = \frac{b - a}{6n} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right).$$

Exercice 1.

- Écrire l'expression mathématique de $I_n^0(f, a, b)$, sous la même forme que l'expression de $I_n^2(f, a, b)$ ci-dessus.
- Écrire une procédure `Rectangles(f, a, b, n)` qui calcule la valeur de $I_n^0(f, a, b)$. On pourra utiliser une procédure auxiliaire qui fournit la liste des $n + 1$ points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ régulièrement espacés dans $[a, b]$.
- Tester la procédure `Rectangles` avec la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, pour $n = 1, 3, 10, 30, 50$. Comparer avec la valeur exacte I de l'intégrale.
- Écrire l'expression mathématique de $I_n^1(f, a, b)$.
- Écrire une procédure `Trapèzes(f, a, b, n)` qui calcule la valeur de $I_n^1(f, a, b)$.
- Écrire une procédure `Simpson(f, a, b, n)` qui calcule la valeur de $I_n^2(f, a, b)$.
- Répéter les tests avec les procédures `Trapèzes` et `Simpson`.
Quelle méthode semble avoir la meilleure convergence ?
- Remplacer l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $[0, \pi]$. Que constate-t-on ?
Expliquer en faisant un schéma dans le cas $n = 4$.

1. Thomas Simpson, mathématicien anglais du 18^e siècle. L'histoire ne dit pas s'il aimait les donuts.

Exercice 2. On souhaite étudier l'erreur relative $E^p(n) = |I - I_n^p|/|I|$ commise par chacune des trois méthodes ($p = 0, 1, 2$), en fonction du nombre d'intervalles n .

- a. On dispose d'une classe `Intégrale` avec une méthode `approx(m)` qui calcule les valeurs approchées sur m sous-intervalles. Lors de l'instantiation de la classe on fournit la fonction à intégrer, l'intervalle, ainsi que la valeur exacte de l'intégrale et la méthode à utiliser pour le calcul approché. Ajouter à cette classe une méthode `erreur(m)` qui calcule l'erreur relative $E^p(m)$ commise par le calcul approché sur m sous-intervalles.
- b. On étudie la fonction $g(x) = 4/(1 + x^2)$ sur $[0, 1]$.
 - (i) Tracer sur un même graphique les erreurs $E^p(n)$ en faisant varier n dans l'ensemble $\{2^k; k = 0, \dots, 6\}$. L'erreur semble décroître très vite quand n croît, mais il n'est pas évident de voir si la décroissance est polynômiale ou exponentielle.
 - (ii) Modifier le script pour utiliser une échelle log-log : `plt.xscale('log')`, `plt.yscale('log')`. On fait maintenant varier n dans l'ensemble $\{2^k; k = 0, \dots, 15\}$. Qu'observe-t-on ? Qu'est ce que cela signifie pour le comportement asymptotique de $E^p(n)$?
 - (iii) Afficher les quotients $\ln(E^p(n))/\ln(n)$, pour n dans l'ensemble $\{2^k; k = 5, \dots, 15\}$. Exécuter également les calculs avec $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Conjecturer un équivalent simple pour $E^p(n)$, à une constante multiplicative près, pour chacune des trois méthodes.
- c. On étudie maintenant la fonction \sqrt{x} sur l'intervalle $[0, 1]$.
 - (i) Afficher le graphe des erreurs relatives pour les méthodes des trapèzes et de Simpson, toujours en échelle log-log. On ajoutera sur le graphe les courbes n^{-2} , n^{-4} en pointillés (`linestyle='dashed'`) pour comparer. Que constate-t-on ?
 - (ii) Recommencer sur les intervalles $[\epsilon, 1]$, en prenant successivement $\epsilon = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$. À quoi le phénomène observé peut-il être dû ?

Exercice 3. Les *fonctions de Bessel* de première espèce sont définies, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, par la formule

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin(t)) dt.$$

- a. Tracer sur une même figure les graphes de J_0 , J_1 , J_2 , J_3 sur l'intervalle $[0, 30]$.
- b. Conjecturer les valeurs C et α dans le comportement asymptotique $J_n(x) \sim Cx^\alpha$ pour J_1 , J_2 et J_3 .