Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

1er semestre 2024–2025
Portail MIM
Calcul formel

TP noté du 21 Octobre

Les notes et corrigés des TP précédents sont autorisés. La consultation de sites web et les communications entre étudiant·es sont interdites. On importera les modules `math` et `matplotlib`, à l'exclusion de tout autre module. On répondra en complétant le fichier python joint au sujet, qui est le seul fichier à rendre.
Les deux premiers exercices sont indépendants. L'exercice 3 utilise les résultats de l'exercice 2.

Les *polynômes de Legendre* sont définis par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence

$$nP_n = (2n-1)XP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}.$$

On peut montrer que les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ relativement au produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, on peut aussi obtenir les P_n en orthonormalisant la base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$ pour ce produit scalaire puis en les normalisant de manière à avoir $P_n(1) = 1$.

Exercice 1.

a. Écrire une procédure `Récurrence(n,X,Y,Z)` qui, étant donnée une liste de points `X = [`x_0`,`x_1`,...,`x_k`]` et un entier n renvoie la liste `[`$P_n(x_0)$`,`$P_n(x_1)$`,...,`$P_n(x_k)$`]` des valeurs correspondantes de P_n, en utilisant la liste `Y` des valeurs de P_{n-1} et la liste `Z` des valeurs de P_{n-2} en ces mêmes points.
Calculer à l'aide de la procédure `Récurrence(n,X,Y,Z)` les valeurs de P_3 pour `X = [1, 2, 5, 10]`. Vérifier que les valeurs obtenues sont correctes en calculant P_3 à la main.

b. Adapter la procédure `Trapèzes(F,h)` du TP précédent pour calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b]$ à l'aide d'un découpage en k trapèzes. La nouvelle procédure ne prend pas comme argument la fonction f, mais la liste `F = [`$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)$`]` des valeurs de f aux $k+1$ points $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ régulièrement répartis dans l'intervale $[a, b]$. Son deuxième argument est la largeur des trapèzes : `h = `$(b-a)/k$.

c. À l'aide de la procédure `Récurrence` calculer les valeurs de P_3 sur une liste `X` de 501 points régulièrement répartis dans $[0, 1]$. Utiliser cette liste pour calculer une valeur approchée de $\int_0^1 P_3(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la procédure `Trapèzes`. Comparer avec la valeur exacte : combien y a-t-il de décimales correctes ?
(On considère par exemple que 0,19923 est une approximation de 0,2 avec 3 décimales correctes.)

d. Utiliser les questions précédentes pour calculer des valeurs approchées des produits scalaires $(P_n \mid P_m)$ pour $0 \le m \le n \le 5$. On utilisera $k = 500$ trapèzes. Vérifier que le résultat est cohérent pour $m < n$. Conjecturer une formule pour $\|P_n\|^2$ (on affichera la réponse avec une commande `print`).

On peut montrer que P_n admet n racines simples réelles qui sont toutes dans $]-1, 1[$. De plus les racines des polynômes P_n sont *entrelacées* : si $z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1}$ sont les racines de P_n, alors P_{n+1} a exactement une racine dans chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$, ainsi que dans $]-1, z_0[$ et dans $]z_{n-1}, 1[$.

Exercice 2.

a. Écrire une procédure `Legendre(n,x)` qui calcule la valeur du polynôme P_n au point x.
Calculer les polynômes P_2, P_3 à la main et vérifier que la procédure `Legendre` donne les bonnes valeurs de P_3 pour `x = `$1, 2, 5, 10$.

b. Représenter sur un même graphique les graphes des polynômes de Legendre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour chaque graphe on placera 201 points.

c. Écrire une procédure `ZérosEntrelacés(n,Z)` qui renvoie la liste des racines de P_n en utilisant la liste `Z` des racines de P_{n-1}. On utilisera la procédure `Dichotomie(f,a,b,p)` du TP n°1 avec $p = 10^{-10}$.
Utiliser la procédure `ZérosEntrelacés` pour calculer les racines de P_3, vérifier le résultat.

d. Ajouter au tracé de la question b les racines des polynômes $P_1, \ldots, P_5$ et vérifier qu'ils correspondent bien aux intersections des graphes avec l'axe des abscisses. Pour placer une liste de réels `L` sur l'axe des abscisses on peut utiliser la commande `plt.plot(L, [0]*len(L), 'ko')`.

(suite au verso)

La méthode de Gauss-Legendre consiste à approcher une intégrale $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par les quantités

$$J_k(f,a,b) = (b-a)\sum_{l=0}^{k} w_l f(t_l) \quad \text{où} \quad w_l = \frac{1-z_l^2}{(k+1)^2 P_k(z_l)^2}, \quad t_l = \tfrac{a+b}{2} + z_l \tfrac{b-a}{2},$$

et z_0, z_1, ..., z_k sont les racines de P_{k+1}.

On dit qu'une méthode de calcul intégral numérique est d'ordre p si elle donne un résultat *exact* (à la précision machine près) pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à p. Par exemple, on peut montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3.

Exercice 3.

a. À l'aide de la procédure `ZérosEntrelacés`, placer les racines de P_n dans une liste `Z[n]`, pour n allant de 1 à 21. Ainsi on aura par exemple `Z[4] = [`z_0, z_1, z_2, z_3`]` où z_0, z_1, z_2, z_3 sont les racines de P_4.
Puis placer les valeurs $P_n(z_k)$ dans une liste `V[n]`, où les z_k sont les racines de P_{n+1}, pour n allant de 1 à 20. Ainsi on aura par exemple `V[3] = [`$P_3(z_0), P_3(z_1), P_3(z_2), P_3(z_3)$`]` où z_0, z_1, z_2, z_3 sont les racines de P_4.

b. Écrire une procédure `GaussLegendre(f,a,b,k)` qui calcule $J_k(f,a,b)$. La procédure pourra accéder aux variables globales `Z`, `V` définies à la question précédente.
Tester cette procédure pour calculer $\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t$, avec $k = 1$, 2, 3, 4.

c. Calculer $J_k - I$ pour $g(x) = x^p$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On fera varier p de 1 à 13, pour $k = 3$.
Faire une conjecture concernant l'ordre de la méthode d'intégration J_k (on affichera la réponse avec une commande `print`).

d. Comparer les erreurs relatives $(I_k^1 - I)/I$, $(J_k - I)/I$ commises par les méthodes des trapèzes et de Gauss-Legendre, pour $f(x) = \sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On fera varier k de 1 à 20 et on tracera les deux courbes d'erreurs sur le même graphique.
On rappelle que l'erreur commise par la méthode des trapèzes est de l'ordre de $1/k^2$ pour k sous-intervalles. De même l'erreur commise par la méthode de Simpson est de l'ordre de $1/k^4$ pour k sous-intervalles (pour les fonctions de classe C^4). A-t-on un comportement analogue de l'erreur pour la méthode de Gauss-Legendre J_k ? Afficher la réponse avec la commande `print`.