

Mémoire

Magistère de Mathématiques
Fondamentales et Appliquées et d'Informatique

École Normale Supérieure, Paris

Roland Vergnioux

lundi 11 octobre 1999

Curriculum vitæ

J'ai suivi en première année de magistère le cursus mixte Math-Physique, motivé principalement par un intérêt pour la physique acquis en classes préparatoires. Cette année bien remplie fut pour moi l'occasion d'élargir et d'approfondir ma culture mathématique et physique, préalable incontournable au choix d'une spécialisation. De ce point de vue, mon stage de cursus mixte sous la direction de B. Julia, au Laboratoire de Physique Théorique de l'ENS, fut riche d'enseignements : j'y fis connaissance avec la physique théorique et me familiarisai avec les concepts de *symétries* et d'*algèbres d'opérateurs*.

Première année

Cursus mixte Math-Physique

- Licence de Physique (mention Bien)
 - Mécanique quantique (C. Delalande) 15
 - Physique macroscopique (Y. Pommeau) 16,5
 - Physique statistique (B. Roulet) 13
 - Hydrodynamique (T. Dombre) 18
- Licence de Mathématiques (mention Très Bien)
 - Analyse 1 (F. Golse) 17
 - Algèbre 1 (J.-F. Mestre) 13
 - Intégration et Probabilités 1 (G. Ben Arous) 12
 - Analyse Complexe (M. Duflo) 15
- Maîtrise de Mathématiques (mention Bien)
 - Analyse 2 (H. Berestycki) 13
 - Probabilités 2 (J. Bertoin) 11
 - Analyse et modèles mathématiques (Y. Brenier) 17
- Mémoire
 - «Équivalences entre bosons et fermions en physique et en mathématiques»
(sous la direction de B. Julia) 15

Ma deuxième année au MMFAI fut en grande partie occupée par la préparation de l'agrégation de mathématiques, qui fut une dernière occasion de travailler sur des domaines très variés, et me permit surtout de me plonger dans les grands classiques de la littérature mathématique (Bourbaki, ...). Parallèlement à la naissance de ce goût pour la lecture, quelques cours de DEA suivis à Paris VII vinrent confirmer et préciser mes préférences : *symétries* avec le cours de représentation des groupes, interactions entre mathématiques et physique dans une description des principes variationnels et de la relativité générale en termes de géométrie différentielle, *physique des particules* dans le cadre de la théorie des champs.

Deuxième année

- Agrégation de Mathématiques (option analyse numérique) 42^{ème}
- Cours du DEA de Mathématiques de Paris VII
 - Représentation des groupes (P. Gérardin) 16
 - Géométrie différentielle (A. Albouy)
 - Théorie des champs (J.-B. Zuber)

La troisième et dernière année de magistère vit le début véritable de ma spécialisation, sous la direction de G. Skandalis : les «groupes quantiques» permettent la description de *symétries* dans le cadre des *algèbres d'opérateurs*, et leur étude, qui a des motivations aussi bien physiques que mathématiques, met en jeu des outils algébriques et analytiques. Ces outils faisaient en particulier l'objet des cours de DEA de B. Keller et L. Vainerman. Le cours de topologie algébrique de P. Vogel fut une autre illustration de l'utilité des outils algébriques, tandis que celui de P. DiFrancesco me permit de garder le contact avec la physique mathématique.

Troisième année

DEA de Mathématiques de Paris VII (mention Très Bien)

- Cours suivis avec examens
 - Groupes et algèbres de Lie (B. Keller) 20
 - C^* -algèbres et groupes quantiques (L. Vainerman) 16
 - Mécanique Statistique et gravitation bidimensionnelle (P. DiFrancesco) 16
- Autres cours
 - Topologie Algébrique (P. Vogel)
 - Probabilités Libres (D. Voiculescu et D. Shlyakhtenko) (réunion annuelle du GDR Algèbres d'Opérateurs)
- Mémoire
 - «Groupes quantiques compacts matriciels» (sous la direction de G. Skandalis)

Table des matières

Curriculum vitæ	iii
Table des matières	v
Introduction	1
(Géométrie non commutative et physique des particules)	
1) Quelques modèles physiques	3
a) Espace des phases	3
b) Espace ambiant	4
2) Théorie des champs	6
3) Déformations non commutatives	8
a) Principes et exemples	8
b) Groupes quantiques	10
I Équivalence entre Bosons et Fermions	15
A) Théorie des champs	17
1) Procédure de quantification et covariance relativiste	17
a) Formalisme hamiltonien	17
b) Description quantique	18
c) Covariance classique	19
2) Cas des champs : une théorie quantique relativiste	20
a) Champs classiques	20
b) Champs quantiques	21
c) Champs relativistes	21
d) Covariance relativiste des champs quantiques	22
3) Seconde quantification et équivalences	23
a) Systèmes de particules quantiques	23
b) Équivalences	24
B) Équivalence entre Fermions et Bosons en Physique	27
1) Propagateurs usuels	27
2) Théories avec interaction	29
3) Théories de Dirac et Thirring	30
4) Théories de Klein-Gordon et Sine-Gordon	32
5) Changement d'ordre normal	33
6) Bosonisation	35
7) Opérateurs fermioniques	36
8) Solitons	38
C) Équivalences entre Fermions et Bosons en Mathématiques	41
1) Opérateurs de vertex	41
a) Réseaux et espaces de Fock associés	41
b) Algèbre associée à un réseau entier	41
c) Opérateurs fermioniques	43
2) Représentations linéaires et espaces de configuration	43

a) Actions de Γ	44
b) Isomorphisme entre \mathcal{B} et $\oplus \mathcal{A}_k$	45
c) Interprétation	46
3) Représentation des algèbres de Lie affines et bosonisation	46
a) Constructions et résultats	46
b) Lien avec la théorie des champs	48
II Groupes Quantiques Compacts Matriciels	51
A) Groupes quantiques compacts matriciels	53
1) Motivations	53
2) Définitions	54
3) Exemples	56
4) Représentations : définitions	57
5) Mesure de Haar	58
B) Théorie des représentations	61
1) Entrelacement et contragrédience	61
2) Décomposition	62
3) Coefficients	64
4) Compléments	67
C) Des représentations au groupe	69
1) Catégories monoïdales concrètes	69
2) Dualité	70
3) Construction de groupes quantiques	73
4) Déformation de la volte	75
5) Représentations de $SU_\nu(N)$	77
Appendice A	83
Bibliographie	87

Introduction

Géométrie non commutative et
Physique des particules

Lundi 23 Août 1999

1) Quelques modèles physiques

Nous introduisons dans cette section quelques modèles simples de physique, avec pour objectif la présentation des révolutions conceptuelles qu'a connues la physique au XX^{ème} siècle et qui sont à l'origine des théories exposées en 2) et 3). Par *modèle* nous entendons un cadre mathématique et des règles d'interprétation permettant la description d'un système physique (N particules ponctuelles dans notre cas). Le détail des *théories* physiques qui entrent dans ce cadre est à chaque fois contenu dans un objet mathématique : lagrangien, hamiltonien, action.

Commençons par le modèle type de la mécanique classique, reposant sur les concepts mathématiques de fonction et d'équation différentielle (apparus d'ailleurs en grande partie au XVII^{ème} siècle pour les besoins de la cinématique) et dont nous donnons ici la formulation lagrangienne.

Modèle 1 (mécanique lagrangienne) Les objets du modèle sont N fonctions $\vec{x}^k \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. $\vec{x}^k(t)$ s'interprète comme la **position** de la $k^{\text{ème}}$ particule à l'instant t . Les équations d'évolution se mettent sous la forme :

$$d_t (\vec{\nabla}_{d_t \vec{x}^k} \mathcal{L}) \circ ((\vec{x}^k), (d_t \vec{x}^k)) (t) = (\vec{\nabla}_{\vec{x}^k} \mathcal{L}) \circ ((\vec{x}^k), (d_t \vec{x}^k)) (t),$$

où $\mathcal{L} \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R})$ est le **lagrangien** du modèle, dont les variables sont notées $(\vec{x}^k)_k$ et $(d_t \vec{x}^k)_k$.

EXEMPLE. Pour N particules indépendantes dans un potentiel $\mathcal{V} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on prend $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum (d_t \vec{x}^k)^2 - \sum \mathcal{V}(\vec{x}^k)$. Alors $\vec{\nabla}_{d_t \vec{x}^k} \mathcal{L} = d_t \vec{x}^k$ et $\vec{\nabla}_{\vec{x}^k} \mathcal{L} = -\vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{x}^k)$ donc les équations du mouvement s'écrivent $d_t^2 \vec{x}^k = -\vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{x}^k)$: ce sont les équations de Newton.

Nous souhaitons maintenant mettre en évidence des objets géométriques dans ce modèle — cf. les modèles 2 et 4, qui en sont essentiellement des reformulations — puis montrer comment leur déformation peut mener à la mécanique quantique et à la relativité générale.

a) Espace des phases

La mécanique hamiltonienne est une reformulation de la mécanique lagrangienne qui a le mérite de mettre la *vitesse* $d_t \vec{x}$ sur le même plan que la *position* \vec{x} , et de faire apparaître ainsi une donnée géométrique, l'*espace des phases*. L'état d'une particule à un instant donné est entièrement déterminé par sa position dans l'espace des phases.

On utilise pour la formulation de ce nouveau modèle le crochet de Poisson $\{f, g\} = \sum \partial_{p^i} f \partial_{q_i} g - \sum \partial_{q_i} f \partial_{p^i} g$, où f et g sont des fonctions de variables p^i et q_i . Notons pour insister sur le caractère géométrique de l'espace des phases que ce dernier devient, muni du crochet de Poisson, une variété de Poisson, notion qui pourrait constituer un cadre mathématique plus général pour le modèle 2.

Modèle 2 (mécanique hamiltonienne) Les objets du modèle sont l'**espace des phases** E (vectoriel de dimension $6N$), les $6N$ formes coordonnées q^i , $p_i \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ et la fonction **vecteur d'état** $\vec{r} \in C^2(\mathbb{R}, E)$. On interprète les $q^i \circ \vec{r}(t)$ comme les **coordonnées des particules** à l'instant t ($1 \leq i \leq 3N$), et les $p_i \circ \vec{r}(t)$ comme leurs **moments conjugués**. Les équations d'évolution sont données par :

$$d_t q^i \circ \vec{r}(t) = \{\mathcal{H}, q^i\} \circ \vec{r}(t) \quad \text{et} \quad d_t p_i \circ \vec{r}(t) = \{\mathcal{H}, p_i\} \circ \vec{r}(t), \quad (1)$$

où $\mathcal{H} \in C^1(E, \mathbb{R})$ est le **hamiltonien** du modèle, dont les variables sont notées $(q^i)_i$ et $(p_i)_i$.

EXEMPLE. Pour N particules indépendantes dans un potentiel $\mathcal{V} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on prend $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \sum \mathcal{V}(\vec{q}^k)$ (où $\vec{q}^k = (q^{3k}, q^{3k+1}, q^{3k+2})$). Alors $\{\mathcal{H}, q^i\} = p_i$ et $\{\mathcal{H}, p_k\} = -\vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{q}^k)$. Le premier jeu d'équations d'évolution donne donc $p_i \circ \vec{r}(t) = d_t q^i \circ \vec{r}(t)$, et le deuxième redonne les équations de Newton : $d_t^2 \vec{q}^k \circ \vec{r}(t) = -\vec{\nabla} \mathcal{V} \circ \vec{q}^k \circ \vec{r}(t)$.

On peut rétrospectivement penser que l'aspect le plus révolutionnaire de la découverte et de l'axiomatisation de la mécanique quantique fut l'accession de p et q au titre d'observables (et non plus de simples variables dynamiques). Comme on le verra en 3), cette notion, profondément géométrique, correspond à celle de «fonction continue réelle sur l'espace des phases» (cf. le modèle 2), lorsque celui-ci est déformé de manière non commutative. Nous précisons ce point de vue plus loin, le lecteur pourra pour l'instant se laisser guider par les notations. Notons simplement que quand $\hbar = 0$, et si on a affaire à des opérateurs bornés sur un espace de dimension finie, les p_i et q^i commutent et peuvent être considérés comme des fonctions sur leur spectre conjoint (sous-ensemble de \mathbb{R}^{6N}) : p_i associe par exemple à un $6N$ -uplet la valeur propre qui lui correspond. On

note $S(H)$ la sphère unité d'un espace de Hilbert H , et on utilise dans ce qui suit des opérateurs non bornés dont le domaine est supposé stable.

Modèle 3 (mécanique quantique) Les objets du modèle sont l'espace des états H (hilbertien), les $6N$ observables q^i, p_i (opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{D} \subset H$ dense) vérifiant les relations de commutation $[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0_{\mathcal{D}}$ et $[q^i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\text{Id}_{\mathcal{D}}$, et la fonction vecteur d'état $\xi \in C^2(\mathbb{R}, S(H))$. Soit μ la mesure spectrale de q^i (resp. p_i), on interprète $(\xi(t)|\mu(X)\xi(t))$ comme la probabilité que le résultat d'une mesure à l'instant t de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du système (resp. du moment conjugué) appartienne à X , compact de \mathbb{R} . L'équation d'évolution est donnée par :

$$i\hbar d_t \xi(t) = \mathcal{H}\xi(t),$$

où \mathcal{H} est l'opérateur hamiltonien du modèle (autoadjoint sur \mathcal{D}).

EXEMPLE. Pour N particules indépendantes dans un potentiel polynômial $\mathcal{V} \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$, on prend $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \sum \mathcal{V}(\vec{q}^k)$ (où $\vec{q}^k = (q^{3k}, q^{3k+1}, q^{3k+2})$). Alors on a $[\mathcal{H}, q^i] = \frac{1}{2}[p_i^2, q^i] = -i\hbar p_i$ et de même $[\mathcal{H}, \vec{p}_k] = i\hbar \vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{q}^k)$. Notons $\langle q^i \rangle \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espérance pour la mesure de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée sur l'état $\xi(\cdot)$:

$$\langle q^i \rangle(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda (\xi(t)|d\mu(\lambda)\xi(t)) = (\xi(t)|q^i\xi(t)).$$

H étant hermitien, il vient $d_t \langle q^i \rangle(t) = i/\hbar (\xi(t)|[H, q^i]\xi(t)) = \langle p_i \rangle(t)$ puis

$$\begin{aligned} d_t^2 \langle \vec{q}^k \rangle(t) &= d_t \langle \vec{p}_k \rangle(t) = i/\hbar (\xi(t)|[H, \vec{p}_k]\xi(t)) \\ &= - \langle \vec{\nabla} V(\vec{q}^k) \rangle. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'équation de Newton pour les valeurs moyennes (si $\deg V < 3$). On peut par ailleurs construire explicitement les opérateurs q^i (resp. p_i), comme opérateurs de multiplication (resp. dérivation) par rapport à une coordonnée sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3N}) \subset L^2(\mathbb{R}^{3N})$ (espace de Schwartz).

Notons que ce qui du point de vue mathématique est une simple déformation (cependant non commutative ...) a d'importantes conséquences conceptuelles en physique. Passer de l'espace des phases (qui correspond aux états vectoriels purs sur l'algèbre des observables : cf. 3)) à l'espace des états en entier revient à introduire le principe de superposition et l'interprétation probabiliste des théories. L'espace des états d'une théorie à N particules s'identifie à un sous-espace du produit tensoriel des espaces «à une particule», ce qui implique le principe de non séparabilité. À la non commutativité correspond par ailleurs le principe d'incertitude et tous les problèmes concernant la notion de mesure qui en découlent.

Finissons par une remarque d'ordre historique : si Poisson vécut avant Heisenberg, il faut néanmoins remarquer que la présentation purement géométrique du modèle 2 (ie la formulation axiomatique de la mécanique analytique) est postérieure à l'introduction de la mécanique quantique. Tout comme cette dernière (avec les fonctions d'onde et l'équation de Schrödinger), la mécanique classique resta longtemps du domaine des équations aux dérivées partielles, duquel se dégagera petit-à-petit la théorie des opérateurs (Hilbert, von Neumann, ...).

b) Espace ambiant

La formulation variationnelle du modèle 1 présente l'intérêt d'introduire la trajectoire comme objet de l'étude d'un système physique, et fait ainsi intervenir un nouvel objet géométrique : l'espace ambiant, dans lequel vit la trajectoire. Le mouvement global de la particule est entièrement donnée par sa trajectoire dans l'espace ambiant.

La forme des équations d'évolution du modèle 4, qui est une condition d'extrémalité sur certains arcs dans l'espace ambiant, ne doit pas être sans rappeler au lecteur la notion géométrique de géodésique d'un espace métrique. Cela nous amène à ne considérer le temps que comme l'un des paramétrages possibles de la trajectoire, choix que nous n'effectuerons pas a priori dans ce qui suit.

Modèle 4 (mécanique variationnelle) Les objets du modèle sont l'espace ambiant V (affine de dimension 3) et N fonctions $\vec{x}^k \in C^2([0, 1], V)$. $\vec{x}^k(s)$ s'interprète comme la position de la $k^{\text{ème}}$ particule au paramètre s de sa trajectoire. Les équations d'évolution prennent la forme :

$$d\mathcal{I}((\vec{x}^k)_k) = 0,$$

où $\mathcal{I} \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ est la fonctionnelle d'action du modèle et

$$\Gamma = \left\{ \vec{f} \in C^1([0, 1], V^N) \mid \vec{f}(0) = \vec{x}_0 \text{ et } \vec{f}(1) = \vec{x}_1 \right\},$$

muni de $\|\vec{f}\|_\Gamma = \|\vec{f}\|_\infty + \|\vec{f}'\|_\infty$,

est l'espace de Banach des trajectoires avec conditions initiales (\vec{x}_0 et $\vec{x}_1 \in V^N$).

EXEMPLE. Pour N particules indépendantes dans un potentiel $\mathcal{V} \in C^1(V, \mathbb{R})$, on pose $\mathcal{I}((\vec{x}^k)) = \sum \mathcal{I}_1(\vec{x}^k)$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\vec{f}) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \vec{f}'(s)^2 - \mathcal{V}(\vec{f}(s)) \right) ds, \quad \text{et on a :} \\ d\mathcal{I}_1(\vec{f}) \cdot \vec{h} &= \int_0^1 \left(\vec{f}'(s) \cdot \vec{h}'(s) - \vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{f}(s)) \cdot \vec{h}(s) \right) ds, \end{aligned}$$

pour $\vec{h} \in \Gamma_0 = \left\{ \vec{h} \in C^1([0, 1], V) \mid \vec{h}(0) = \vec{h}(1) = 0 \right\}$ (espace tangent à Γ). Les équations du mouvement pour le modèle 4 s'écrivent donc par intégration par parties :

$$\forall \vec{h} \in \Gamma_0 \quad \int_0^1 \left(\vec{f}''(s) + \vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{f}(s)) \right) \cdot \vec{h}(s) ds = 0,$$

et on retrouve à nouveau les équations de Newton (s s'interprète alors comme le temps).

La révolution conceptuelle opérée par Einstein au début du XX^{ème} siècle s'est effectuée en deux phases (relativité restreinte et générale), concernant toutes deux la nature géométrique de l'espace ambiant. Dans la première, il lui ajoute une dimension en y intégrant la coordonnée temporelle, et le munit d'une métrique minkowskienne constante. Cela l'amène à utiliser la notion de temps propre d'un mobile, paramètre naturel de sa trajectoire (cf. modèle 2). Dans la seconde phase, il introduit la possibilité de faire varier, spatialement et temporellement, la métrique g , qui devient ainsi une «variable dynamique». Il aboutit alors à une géométrisation très poussée de la mécanique classique (parallèlement au développement mathématique de la notion de variété qu'il utilise).

Par exemple, l'action associée au champ électromagnétique, qui redonne les équations de Maxwell, s'écrit simplement $\int \|dA\|_g d\nu$ (où $A \in \Gamma(T^*V)$ est le potentiel quadrivecteur et ν , la forme volume associée à g) : le principe variationnel correspond donc à une équation des géodésiques. Dans ce qui suit nous nous restreignons toujours à un système de N particules ponctuelles, sans préciser a priori la manière dont elles interagissent entre elles et avec la métrique (action \mathcal{I}_M) — cependant dans la théorie d'Einstein \mathcal{I}_M est simplement la somme des longueurs des trajectoires relativement à la métrique g (cf. EXEMPLE ci-dessous). Le terme d'action propre à la métrique, \mathcal{I}_E , est fixé et purement géométrique (dans le cas d'une variété compacte on reconnaît simplement la caractéristique d'Euler).

Modèle 5 (mécanique relativiste) Les objets du modèle sont l'espace ambiant V , variété lisse de dimension 4, une métrique pseudo-riemannienne $g \in \Gamma(T^*V \times T^*V)$ sur V , et N fonctions $x^i = (x_0^i, \vec{x}^i) \in C^2(\mathbb{R}, V)$. $x^i(s)$ s'interprète comme la position spatio-temporelle de la $i^{\text{ème}}$ particule à l'instant s (de son temps propre). Les équations d'évolution s'écrivent :

$$d\mathcal{I}(g, (x^i)) = 0,$$

où $\mathcal{I} = \mathcal{I}_E + \mathcal{I}_M \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ est la fonctionnelle d'action du modèle, Γ , l'espace des trajectoires et métriques avec conditions au bord, et $\mathcal{I}_E(g) = \int R_g(s) d^4s$ est l'action d'Einstein (R_g est la courbure scalaire de g).

EXEMPLE. Pour N particules indépendantes de masses négligeables dans un potentiel gravitationnel $\mathcal{V} \in C^1(V, \mathbb{R})$ créé par des masses extérieures immobiles, on peut considérer que la métrique n'est pas affectée par le mouvement du système et vaut $(v|w)_g = \langle g(x), v \otimes w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - (1 + 2\mathcal{V}(x))v_0 w_0$ pour $v, w \in T_x V$. On prend comme fonctionnelle d'action pour la matière $\mathcal{I}_M((x^i)) = \sum \mathcal{I}_1(x^i)$ avec :

$$\mathcal{I}_1(f) = \int \|f'(s)\|_g ds = \int \left(\vec{f}'(s)^2 - (1 + 2\mathcal{V}(f(s)))f_0'(s)^2 \right) ds.$$

Par un calcul analogue à celui de l'exemple précédent (cf. par exemple [41, 5.6.14]), et sachant que $\partial_0 \mathcal{V} = 0$, le principe variationnel s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall h \in \Gamma_0 \quad & -2 \int \left(\vec{f}''(s) + \vec{\nabla} \mathcal{V}(f(s)) f_0'(s)^2 \right) \cdot \vec{h}(s) ds \dots \\ & \dots - 2 \int \left(1 + 2\mathcal{V}(f(s)) \right) f_0'(s) h_0'(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Lorsque \mathcal{V} est petit devant 1 (limite non relativiste), et en faisant varier la composante temporelle de h (deuxième intégrale), on voit que f_0' est constante, puis en faisant varier la composante spatiale de h , on retrouve (après le changement de paramètre $s \leftarrow f_0' s$, ce qui fait de s le temps de l'observateur) les équations de Newton $\vec{f}''(s) = -\vec{\nabla} \mathcal{V}(\vec{f}(s))$.

Cette déformation de l'espace ambiant \mathfrak{a} , comme dans le cas de la mécanique quantique, d'importantes conséquences conceptuelles : existence d'une vitesse limite, abandon (ou «relativisation») des notions de simultanéité et de localité, relance des spéculations sur la «forme» et l'«étendue» de l'univers (singularités, topologie, ...).

2) Théorie des champs

La mise au point d'une version quantique et relativiste de la théorie classique des champs est vite apparue comme une nécessité, tant parce que les champs avaient dominé la physique de la fin du XIX^{ème} siècle (avec Maxwell notamment), qu'à cause des correspondances qu'établissait la mécanique quantique élémentaire elle-même entre ondes et corpuscules (via le formalisme des fonctions d'onde). De fait la théorie quantique des champs, introduite dans le modèle 6 et présentée plus en détails dans la partie I de ce mémoire, répond à ces deux soucis : on y trouve une description quantique des champs, mais aussi une description de systèmes contenant un nombre variable (éventuellement infini) de particules quantiques («seconde quantification»). Cela représente un progrès par rapport à la mécanique quantique «classique» du modèle 3, qui ne pouvait pas par exemple fournir de description des réactions nucléaires (durant lesquelles le nombre de particules n'est pas conservé).

La mécanique classique des champs fait intervenir les deux espaces, des phases et ambiant, introduits en 1). De manière plus précise, un champ ϕ est donné par sa valeur $\phi(\vec{x})$ en chaque point \vec{x} de l'espace ambiant V (tridimensionnel). Cette valeur (ou charge) évolue dans un espace vectoriel caractéristique du champ (de dimension 3 pour le champ magnétique, par exemple), et à chaque variable dynamique $\phi(\vec{x})$, dont le moment conjugué est noté $\pi(\vec{x})$, correspond ainsi un espace des phases E_x (de dimension double). L'espace des phases du système «champ» est donc $E = \bigoplus_{\vec{x} \in V} E_x$. Les coordonnées sur E sont données, dans une vision hamiltonienne (cf. modèle 2), par les $\phi(\vec{x})$ et $\pi(\vec{x})$.

Une première mécanique quantique des champs s'obtient alors, comme pour le modèle 3, par déformation de l'espace des phases E_x (puis passage, par le principe de superposition, à l'espace des états), c'est-à-dire en imposant des relations de commutation non triviales entre $\phi(\vec{x})$ et $\pi(\vec{x})$, les observables $\phi(\vec{x})$, $\phi(\vec{y})$ (resp. $\pi(\vec{x})$, $\pi(\vec{y})$) commutant toujours entre elles. Les théories ainsi obtenues sont dites bosoniques. Il est par ailleurs possible, et souhaitable dans le cas de certains hamiltoniens, d'effectuer la même «quantification» en remplaçant tous les commutateurs par des anticommutateurs ; les théories correspondantes sont dites fermioniques. Nous intégrons les deux possibilités dans le modèle 6 en considérant n champs donc certains sont bosoniques et d'autres fermioniques. On se restreint de plus à des opérateurs bornés.

On déforme pour finir l'espace ambiant — en s'arrêtant cependant à la relativité restreinte (cela revient à se placer aux échelles microscopiques de la physique des particules et à supposer que la structure locale de l'espace-temps n'est pas affectée par la relativité générale). Pour effectuer ce passage, il faut remettre temps et espace sur le même niveau : pour l'instant t est la variable du vecteur d'état ξ , tandis que \vec{x} est l'indice des familles d'observables ϕ et π . On adopte pour cela la représentation de Heisenberg du modèle 3, ie on fixe le vecteur d'état, mais on fait dépendre les observables du temps ($q^i \in C^0(\mathbb{R}, L(H)_h)$) de manière à préserver les règles d'interprétation : $q^i(t)$ sera ainsi l'observable associée à la mesure de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée à l'instant t (**modèle 3bis**). Cela se fait concrètement à l'aide des formules $\xi \leftarrow \xi(0)$ et $q^i(t) \leftarrow e^{it\mathcal{H}/\hbar} q^i e^{-it\mathcal{H}/\hbar}$, $q^i(t)$ vérifie alors l'équation d'évolution $d_t q^i(t) = i/\hbar [\mathcal{H}, q^i(t)]$ (version «quantifiée» de (1)). Dans le cas des champs, les familles d'observables ϕ et π sont maintenant indicées par $\vec{x} \in V$ et $t \in \mathbb{R}$, et on retrouve l'espace ambiant de la relativité restreinte.

Modèle 6 (théorie quantique des champs) Les objets du modèle sont l'espace des états H (hilbertien), le vecteur d'état $\xi \in H$, l'espace ambiant V (de dimension 4), et les champs d'observables vectorielles ($1 \leq r \leq n$) indicés par $x \in V : \phi_r(x), \pi_r(x) \in L(H)_h$ vérifiant les relations de commutation (pour $x - y$ de genre espace) :

$$\begin{aligned} [\phi_r(x), \phi_s(y)] &= [\pi_r(x), \pi_s(y)] = [\phi_r(x), \pi_s(y)] = 0 \quad (r \neq s), \\ [\phi_r(x), \phi_r(y)] &= [\pi_r(x), \pi_r(y)] = 0 \quad \text{et} \quad [\phi_r(x), \pi_r(y)] = i\hbar \delta^4(x - y), \\ \{\phi_s(x), \phi_s(x')\} &= \{\pi_s(x), \pi_s(x')\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\phi_s(x), \pi_s(y)\} = i\hbar \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (2)$$

si ϕ_r est bosonique et ϕ_s , fermionique. Les règles d'interprétation sont les mêmes que pour le modèle 3, l'observable $\phi_r(x)$ étant par exemple associée à la mesure du $r^{\text{ième}}$ champ au point x . Enfin les équations d'évolution s'écrivent :

$$\partial_t \phi_r(x) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \phi_r(x)] \quad \text{et} \quad \partial_t \pi_r(x) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \pi_r(x)], \quad (3)$$

où $\mathcal{H} \in L(H)_h$ est l'opérateur hamiltonien du modèle.

Le cadre mathématique de ce modèle contient des nouveautés conceptuelles par rapport aux modèles 3 et 5. On dispose ainsi d'une équivalence entre ondes et corpuscules : parallèlement à l'interprétation ondulatoire introduite dans le modèle 6, ses objets mathématiques sont sujets à une seconde interprétation, phénoménologiquement pertinente, en termes corpusculaires. L'état propre de champ nul est appelé dans cette interprétation état vide et noté $|0\rangle$ (c'est un vecteur de norme 1), et on sait associer, dans le cas des théories usuelles, une famille ϕ^- d'opérateurs «de création» à la famille d'observables ϕ , telle que $\prod \phi_{r_i}^-(x_i) |0\rangle$ s'interprète comme l'état qui contient avec probabilité 1 une particule de type r_i en x_i , pour tout i . Les particules associées à un champ fermionique (resp. bosonique) sont appelées fermions (resp. boson), et le seul cadre mathématique du modèle 6 nous renseigne sur leur comportement : il est impossible de placer 2 fermions dans le même état (principe d'exclusion, qui permet d'expliquer la stabilité des atomes et découle de (2) : $\phi_s^-(x)\phi_s^-(x) |0\rangle = 0$ car $\phi_s^2 = 0$), alors que c'est possible pour des bosons (ce qui explique les phénomènes de condensation de Bose, de rayonnement laser, ...).

L'objet principal de la partie I de ce mémoire est la mise en évidence d'équivalences entre fermions et bosons, c'est-à-dire de théories quantiques des champs qui admettent une interprétation fermionique et une interprétation bosonique. Par exemple on sait bien en mécanique quantique «classique» (modèle 3) qu'un système lié de deux fermions a un comportement bosonique. Inversement on aboutit en I, B) au résultat suivant :

Théorème (cf. partie I, B)7) ou [28]) Soit $\phi(x)$ un champ libre de la théorie bosonique de Sine-Gordon de masse nulle, définie (cf. modèle 6) sur l'espace ambiant V de dimension 2 (on note $t = x_0$) par les relations de commutation et le hamiltonien :

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\partial_t \phi(x), \partial_t \phi(y)] = 0 \quad \text{et} \quad [\phi(x), \partial_t \phi(y)] = i\hbar \delta^4(x - y), \\ \mathcal{H} &= \int : \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \phi(x)^2 + \partial_t \phi(x)^2 \right) + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos(\beta \phi(x)) : d^3 \vec{x}, \end{aligned}$$

où $:$ désigne l'ordre normal de masse m (on a remplacé π par son expression, $\partial_t \phi$, donnée par la première équation d'évolution (3)). Posons :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \sqrt{\frac{cm}{2\pi}} : \exp \left(-2i\pi\beta^{-1} \int_{-\infty}^x \partial_t \phi(t, \xi) d\xi - \frac{1}{2} i\beta \phi(x) \right) : \quad \text{et} \\ \psi_2(x) &= -i\sqrt{\frac{cm}{2\pi}} : \exp \left(-2i\pi\beta^{-1} \int_{-\infty}^x \partial_t \phi(t, \xi) d\xi + \frac{1}{2} i\beta \phi(x) \right) : , \end{aligned}$$

et définissons les courants renormalisés associés par

$$\begin{aligned} j^0(x, t) &= \lim_{y \rightarrow x} |cm(x - y)|^\sigma \bar{\psi}(x, t) \gamma^0 \psi(y, t) \quad \text{et} \\ j^1(x, t) &= (4\pi)^{-1} \beta^2 \lim_{y \rightarrow x} |cm(x - y)|^\sigma \bar{\psi}(x, t) \gamma^1 \psi(y, t). \end{aligned}$$

Ces champs vérifient les relations d'anticommutation :

$$\begin{aligned} \{\psi_r(x), \psi_s(y)\} &= \{\psi_r^\dagger(x), \psi_s^\dagger(y)\} = 0 \quad \text{et} \\ [j^r(x), \psi(y)] &= -(g^{r0} + \epsilon^{r0} \gamma^5) \psi(x) \delta^2(x - y), \end{aligned}$$

à condition que la puissance σ soit donnée par l'égalité :

$$\sigma = \frac{\beta^2}{8\pi}(1 - 4\pi\beta^{-2})^2. \quad (4)$$

Ils vérifient aussi l'équation d'évolution de la théorie (fermionique) de Thirring, donnée avant renormalisation par le hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \int : \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + M_0)\psi + \frac{g}{2} \sum_{\mu} \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi : ,$$

où $\alpha_0 = m^2$, et g est la constante de couplage de la théorie, reliée à σ par :

$$\sigma = \frac{g}{2\pi} \frac{2\pi + g}{\pi + g} \quad (\text{ie} \quad \frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + \frac{g}{\pi}}, \text{ compte tenu de (4)}).$$

Le moment conjugué de ψ est $\pi = i\psi^{\dagger} = i\bar{\psi}\gamma_0$, et les $\gamma_{\mu} \in M_2(\mathbb{C})$ sont les générateurs infinitésimaux d'une représentation de $SU(2)$ sur V .

On ne cite pas tant ce théorème pour le résultat en lui-même (le lecteur intéressé pourra se reporter à la partie I, B) de ce mémoire) que pour les remarques intéressantes que l'énoncé appelle. On y voit apparaître en particulier les termes d'«ordre normal», de «courant renormalisé» ... À travers cette technicité se manifeste le problème de définir effectivement des théories qui entrent dans le cadre du modèle 6. Déjà la réalisation la plus classique du modèle 3 fait intervenir des opérateurs non bornés (multiplications et dérivations par rapport à un système de coordonnées) sur l'espace des fonctions d'onde $H = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Dans le cas des champs, avec les hamiltoniens les plus classiques, on est immédiatement confronté à des divergences (par exemple celle des éléments de matrice diagonaux de $\phi(x)\phi(y)$ quand y tend vers x) qui ne peuvent être résolues qu'au moyen de techniques élaborées mises au point par les physiciens et regroupées sous le terme générique de renormalisation. Certains hamiltoniens (par exemple celui associé au champ électromagnétique) posent même des problèmes supplémentaires, dus à leur «invariance de jauge». En fin de compte, les objets que l'on manipule sont principalement des lagrangiens et des diagrammes de Feynman; les opérateurs du modèle 6 semblent n'être qu'une notation pratique (à côté de celle, que nous n'avons pas introduite, des intégrales de chemin). Cette «dégéométrisation» est un des problèmes actuels de la théorie, peut-être relié à celui, plus préoccupant pour les physiciens, de son incapacité à inclure la relativité générale (ie la gravitation).

Il peut paraître paradoxal après ce constat que le résultat d'équivalence entre fermions et bosons du théorème ci-dessus apparaisse également dans le contexte mathématique de la représentation des algèbres de Lie affines. Cet aspect de la bosonisation, présenté dans la partie I, C) de ce mémoire, est déjà perceptible dans l'énoncé du théorème : l'équivalence n'a pas lieu en effet au niveau des vecteurs d'état, mais plutôt au niveau des algèbres constituées par les observables (familles ϕ et ψ_r). En fait, les algèbres d'opérateurs forment un cadre naturel pour l'étude des déformations (éventuellement non commutatives, comme c'est le cas pour le passage du modèle 2 au modèle 3) d'espaces localement compacts : nous expliquerons pourquoi dans la section suivante. Les concepts géométriques nouveaux qui y sont étudiés seront peut-être utiles aux physiciens théoriciens.

3) Déformations non commutatives

a) Principes et exemples

Le principe de la géométrie non commutative est le suivant : considérer, non plus les espaces eux-mêmes, mais des algèbres de fonctions à valeurs complexes définies sur ces espaces, identifier de manière axiomatique ces algèbres, montrer qu'elles contiennent toutes les informations sur les espaces de départ, puis abandonner l'axiome de commutativité. On pense alors aux algèbres obtenues comme à des algèbres de fonctions sur des «pseudo-espaces», ou «espaces quantiques», ou «espaces non commutatifs»..., et on essaye d'étendre les définitions et résultats de la théorie classique : en leur donnant un énoncé équivalent au niveau des algèbres de fonctions, puis en examinant ce qu'ils deviennent lorsque ces algèbres ne sont plus commutatives. Donnons tout de suite l'exemple de base de la théorie.

Définition (C^* -algèbre) On appelle C^* -algèbre un \mathbb{C} -e.v. A muni d'une structure d'espace de Banach et d'une structure d'algèbre involutive, telles que $\forall a, b \in A \quad \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ et $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Un état sur A est une forme linéaire continue positive ω de norme 1, il est dit **pur** si

L'égalité $\omega = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2$, avec ρ_1 et ρ_2 des états, implique la colinéarité de ρ_1 et ρ_2 . L'ensemble des états (resp. purs) est noté $E(A)$ (resp. $P(A)$). Un **caractère** sur A est un morphisme d'algèbres involutives continu de A dans \mathbb{C} , non nul.

EXEMPLE. Soit X un espace localement compact, $C_0^0(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est une C^* -algèbre, et pour tout $x \in X$, ($f \mapsto f(x)$) est un caractère et un état pur sur $C_0^0(X)$. Le théorème ci-dessous montre que cet exemple est générique parmi les C^* -algèbres commutatives. $C_0^0(X)$ est également une C^* -algèbre (pour la même norme), unifère, et est donc isomorphe à $C_0^0(\tilde{X})$ pour un certain espace compact \tilde{X} , dans lequel X est dense (à isomorphisme près et pourvu que X soit «complètement régulier» — cf. [10, §1, prop. 3 et 6]). \tilde{X} est appelé compactifié de Stone-Čech de X .

EXEMPLE. Soit H un espace de Hilbert, et A une sous-algèbre involutive de $L(H)$ normiquement fermée. Alors A est une C^* -algèbre pour la norme d'opérateur, et on peut montrer (cf. [18, th. 2.6.1]) que cet exemple est générique parmi les C^* -algèbres. Par exemple, pour X localement compact, les éléments de $C_0^0(X)$ agissent par multiplication sur $L^2(X)$.

Théorème (de Gelfand-Naïmark) (cf. [7, §6]) Soit A une C^* -algèbre commutative et X l'ensemble des caractères sur A . Muni de la topologie préfaible, c'est un espace localement compact. Notons $\mathcal{G}(a) = (\chi \mapsto \chi(a))$ pour $a \in A$, $\chi \in X$ (transformation de Gelfand de A). \mathcal{G} définit un isomorphisme entre A et $C_0^0(X)$.

Ce théorème identifie, comme on l'a annoncé, les algèbres qui sont du type $C_0^0(X)$ pour X localement compact : ce sont les C^* -algèbres commutatives. Il donne de plus un procédé pour retrouver l'espace original à partir de l'algèbre de fonctions. Il est donc naturel de considérer les C^* -algèbres, commutatives ou non, comme les algèbres de fonctions (continues et nulles à l'infini) sur les «espaces localement compacts non commutatifs».

Donnons un exemple d'extension non commutative de définitions et résultats classiques. Il est clair qu'un espace localement compact X est compact **ssi** $C_0^0(X, \mathbb{C})$ est unifère. On dit donc que l'espace localement compact non commutatif associé à une C^* -algèbre A est compact si A est unifère. On a dans ce cadre un énoncé «non commutatif» pour le théorème de Stone-Weierstraß : si B est une sous- C^* -algèbre de A qui contient 1 et sépare $\overline{P(A)}$, alors $A = B$ (cf. [18, th. 11.3.1]). Ainsi les états purs $\omega \in P(A)$ (qui sont les caractères quand A est commutative) jouent à certains égards le rôle des points de l'espace non commutatif associé à A .

Nous avons annoncé en 1) que les observables d'une théorie quantique pouvaient être considérées comme des fonctions réelles sur une déformation non commutative d'un espace des phases classique. La description de cette déformation ne peut se faire directement en termes de C^* -algèbres, car les opérateurs q^i et p_i du modèle 3 *ne peuvent pas* être tous les deux bornés — plus généralement, il est facile de montrer que deux éléments a, b d'une C^* -algèbre ne peuvent vérifier de relation $[a, b] = \lambda 1$ avec λ non nul. On préfère donc considérer les opérateurs de Weyl (cf. [42, 3.1.1])

$$W(r, s) = e^{\frac{i\hbar}{2} \sum r^i s_i} e^{i \sum r^i p_i} e^{i \sum s_i q^i} \quad \text{pour } r = (r^i), s = (s_i) \in \mathbb{R}^{3N},$$

qui sont bornés (calcul fonctionnel borélien) et vérifient

$$W(r, s)W(r', s') = e^{\frac{i\hbar}{2} \sum (r^i s'_i - s_i r'^i)} W(r + r', s + s'). \quad (5)$$

Alors la C^* -algèbre A_\hbar engendrée par les $W(r, s)$ contient les $f(q^i)$ et $f(p_i)$ pour $f \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui sont les seules observables physiquement accessibles. De plus on retrouve q^i (resp. p_i) par dérivation (pour la topologie forte sur $L(H)$) de W en $(0, 0)$ relativement à s_i (resp. r^i). Enfin chaque vecteur $\xi \in S(H)$ définit un état $\omega_\xi = (a \mapsto (\xi|a\xi))$ sur A_\hbar . Soit μ la mesure spectrale de $a \in A_\hbar$ hermitien, alors la mesure $X \mapsto (\xi|\mu(X)\xi)$ s'écrit aussi, en tant que forme linéaire sur $C^0(\text{Sp}(a)) : f \mapsto (\xi|f(a)\xi) = \omega_\xi(f(a))$, donc s'identifie à $\omega_\xi|_{C^0(\text{Sp}(a))}$ (où on identifie $C^0(\text{Sp}(a))$ à la C^* -algèbre engendrée par a).

Les observables (physiques) du modèle 3 sont ainsi les éléments hermitiens d'une C^* -algèbre unifère A , et ses vecteurs d'état s'identifient à certains états sur A , qui évoluent suivant un groupe à un paramètre (Φ_t) d'automorphismes de $E(A)$. De plus le résultat d'une mesure de l'observable a appartient au spectre de a , et la probabilité correspondante, pour un système dans l'état ω , est la mesure induite sur $\text{Sp}(a)$ par ω . Ces objets, prescription d'évolution et règles d'interprétation forment un **modèle 3^{ter}** qui contient donc comme cas particulier le modèle 3, mais également le modèle 2 : considérer la C^* -algèbre $A = C_b^0(E)$, les états $\omega_{\vec{r}} = (a \mapsto a(\vec{r}))$ et le flot $\Phi_t(\omega_{\vec{r}(0)}) = \omega_{\vec{r}(t)}$ (où $\vec{r}(t)$ est solution de (1)).

Le modèle 3^{ter} est donc le bon cadre pour décrire la déformation (non commutative) du modèle 2 en le modèle 3 — la déformation explicite étant donnée par les C^* -algèbres unifères A_{\hbar} : quand $\hbar = 0$, A_{\hbar} est commutative d'après (5) et s'identifie à l'algèbre des fonctions bornées sur E (espace des phases classique). Les observables de A_{\hbar} peuvent ainsi être considérées comme les fonctions continues réelles sur un espace compact non commutatif, auquel on doit penser comme au compactifié de Stone-Čech d'un espace des phases non commutatif. Les opérateurs p_i et q^i du modèle 3 sont des fonctions réelles continues non bornées sur cet espace des phases («coordonnées»).

La déformation relativiste de l'espace ambiant présentée en 2) (passage du modèle 4 au modèle 5) est, elle, commutative : l'espace obtenu est encore classique. Peut-être est-elle de ce fait insuffisante, et reste un cadre trop rigide pour une théorie quantique des champs mathématique et intégrant la gravitation? A. Connes a obtenu des résultats dans ce sens : dans [13] il donne une interprétation géométrique du modèle standard en mettant son lagrangien sous une forme analogue à celle du lagrangien de Maxwell. Puis dans [15] il étend ce travail au cadre des variétés riemanniennes non commutatives pour obtenir une action purement géométrique qui inclut celle du modèle standard et celle de Weyl-Einstein.

Étant donnée une variété pseudoriemaniennne compacte V on considère ainsi, suivant les principes énoncés au début de cette section, l'algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ qui agit par multiplication sur l'espace de Hilbert $H = L^2(V, \mathbb{C}^4)$, lui-même muni de l'opérateur de Dirac $D = i\gamma^\mu \partial_\mu$ (dans des coordonnées locales). (\mathcal{A}, H, D) contient toute l'information sur V : V est homéomorphe à l'ensemble des caractères sur \mathcal{A} , et la distance géodésique entre deux caractères x et y sur \mathcal{A} est donnée par la formule

$$d(x, y) = \text{Sup} \{ |a(x) - a(y)| \mid a \in \mathcal{A}, \| [D, a] \|_{L(H)} \leq 1 \}.$$

Plus important, Connes caractérise les triplets (\mathcal{A}, H, D) qui proviennent ainsi d'une variété (axiomes (1) à (7) de [14]), et en donne une version non commutative, définissant ainsi les triplets (\mathcal{A}, H, D) associés à des «variétés pseudoriemanniennes non commutatives».

Les autres *objets* du modèle physique sont le champ fermionique $\psi \in H$, une fonction de cut-off χ et l'échelle de cut-off Λ . L'évolution est donnée par l'action $\text{Tr} \chi(D/\Lambda) + (\psi | D\psi)$, c'est-à-dire par la structure géométrique de (\mathcal{A}, H, D) . Sans entrer dans les détails, le triplet (\mathcal{A}, H, D) de la théorie présentée dans [15] est obtenu comme produit tensoriel du triplet classique associé à la variété pseudoriemaniennne du modèle 5, et d'un triplet non commutatif mais de dimension finie. L'espace ambiant proposé par Connes est donc le «produit» de l'espace ambiant usuel (commutatif et continu) par un espace fini non commutatif.

L'interprétation reste celle du modèle standard classique (intégrales de chemin, diagrammes de Feynman, renormalisation, ...) : la non-commutativité de l'espace des phases reste problématique. Des résultats très récents (cf. [16]) vont cependant dans le sens d'une mathématisation du procédé de renormalisation dimensionnel. La théorie régularisée (avec un paramètre $z \in \mathbb{C}$ proche de 0) apparaît dans cette étude comme un point d'un groupe de Lie G_K , et on s'intéresse particulièrement au lacet γ obtenu dans ce groupe lorsque z varie dans le cercle unité. La théorie renormalisée est alors, en tant que point de G_K , $\gamma_+(0)$, où $\gamma = \gamma_-^{-1} \gamma_+$ est la décomposition de Birkhoff de γ : γ_+ (resp. γ_-) est un lacet qui s'étend en une application holomorphe sur le disque unité (resp. son complémentaire, avec $\gamma_-(\infty) = 1$).

b) Groupes quantiques

Par soucis de simplicité, on n'a pas introduit dans les modèles de la section 1) la notion de changement de référentiel. Elle prend dans chaque cas la forme de l'action d'un groupe de symétries sur l'espace des phases (éventuellement étendu en l'espace des états) ou l'espace ambiant, selon le cas. Dans le modèle 6, le groupe de symétries agit d'une part sur l'espace ambiant V et d'autre part sur chaque espace des phases E_x ($x \in V$) : il s'écrit donc typiquement $G = \text{Diff}(V) \rtimes C^\infty(V, G_0)$.

Les symétries jouent cependant un rôle fondamental en physique, pour au moins deux raisons. Tout d'abord, l'exigence de «relativité» des équations d'évolution est traditionnellement traduite par leur invariance sous l'action du groupe de symétries G , et on prend en pratique comme hamiltonien le polynôme invariant «le plus simple» sur l'espace des phases (mathématiquement on utilise un morphisme d'espaces G -homogènes d'une puissance tensorielle symétrique minimale de l'espace des phases vers la représentation triviale de G). D'autre part, lorsque les équations d'évolution sont invariantes, le théorème de Noether associe à chaque sous-groupe à un paramètre de G une constante du mouvement (ie une fonction sur l'espace des phases constante sur chaque trajec-

toire $\vec{r}(t)$, avec le langage du modèle 2), ce qui amène souvent une simplification substantielle des équations à résoudre.

De fait c'est la déformation du groupe de Poincaré en celui de Minkowski qui a constitué la première étape vers l'introduction de la relativité restreinte, au début du XX^{ème} siècle. Plus récemment, l'interprétation géométrique du modèle standard évoquée en a) a comme point de départ la tentative de mettre le groupe $\text{Diff}(V) \times C^\infty(V, G_0)$ sous la forme $\text{Diff}(V')$, ce qui n'est possible que si V' est un espace non commutatif : en effet le premier groupe n'est jamais simple, alors que le deuxième l'est toujours si V' est une variété classique. Il est très naturel dans ce contexte de partir à la recherche de groupes «non commutatifs», encore appelés «groupes quantiques» (on préfère de loin cette terminologie qui n'entraîne pas d'interférence avec la notion de groupe abélien), qui seraient des déformations de groupes de symétries classiques.

Le cadre général est de manière naturelle celui des algèbres de Hopf. Considérons en effet, suivant les principes énoncés au début de a), l'algèbre involutive $A = \mathbb{K}_a(G)$ des fonctions sur un groupe fini G d'unité e . On peut la munir d'une structure supplémentaire qui reflète la structure de groupe de G : une comultiplication $\Delta : f \mapsto ((s, t) \mapsto f(st)) \in A \otimes A \simeq \mathbb{C}^{G \times G}$, une counité $\varepsilon : f \mapsto f(e)$ et un antipode $S : f \mapsto (s \mapsto f(s^{-1}))$. Les applications linéaires unifères Δ , ε et S vérifient les relations (6) à (12) suivantes. $\Sigma \in L(A \otimes A)$ est la volte $\zeta \otimes \xi \mapsto \xi \otimes \zeta$, $m \in L(A \otimes A, A)$, la multiplication de A , et a et b sont des éléments de A .

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \Delta(a^*) = \Delta(a)^*, \quad (6)$$

$$\text{Id} \otimes \Delta \circ \Delta = \Delta \otimes \text{Id} \circ \Delta, \quad (\text{coassociativité}) \quad (7)$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \quad \varepsilon(a^*) = \varepsilon(a)^*, \quad (8)$$

$$\varepsilon \otimes \text{Id} \circ \Delta = \text{Id} \otimes \varepsilon \circ \Delta = \text{Id}, \quad (\text{counité}) \quad (9)$$

$$S(ab) = S(b)S(a), \quad S(a^*) = S(a)^*, \quad S^2 = \text{Id}, \quad (10)$$

$$m \circ \text{Id} \otimes S \circ \Delta = m \circ S \otimes \text{Id} \circ \Delta = 1\varepsilon, \quad (\text{coinverse}) \quad (11)$$

$$\Sigma \circ S \otimes S \circ \Delta = \Delta \circ S. \quad (12)$$

Les axiomes (6) à (12) caractérisent en fait les algèbres commutatives de dimension finie du type $\mathbb{K}_a(G)$. Ils ont toujours un sens lorsqu'on abandonne la commutativité de A : on obtient alors la catégorie des algèbres de Hopf involutives de dimension finie, qu'il est naturel de considérer comme les algèbres de fonctions sur les «groupes quantiques finis».

Une première extension de ces idées aux groupes localement compacts est apparue avec les tentatives de prolongement de la dualité de L.S. Pontrjagin (1934) aux groupes non abéliens. Dès 1938 et 1941, T. Tannaka et M.G. Krein savaient reconstruire un groupe compact à partir de ses représentations irréductibles, qui sont les caractères dans le cas abélien, et caractériser axiomatiquement la structure de ces dernières. Cependant la dualité ainsi obtenue manque de symétrie : les groupes et leurs duals n'appartiennent pas à la même catégorie. La catégorie des algèbres de Hopf involutives de dimension finie constituait de ce point de vue un exemple prometteur : elle contient en effet la catégorie des groupes finis, et est naturellement munie d'une dualité (induite par celle des espaces vectoriels et par la transposition des applications linéaires) qui prolonge celle des groupes abéliens finis : $\widehat{\mathbb{K}}_a(G) = \mathbb{K}_a(\widehat{G})$.

Ce résultat est étendu en 1961 puis 1973 au cas localement compact par G.I. Kac, L.I. Vainermann, M. Enock et J.-M. Schwarz, qui donnent une généralisation non commutative des algèbres $A = L^\infty(G)$. Du point de vue analytique, le cadre est celui des algèbres de von Neumann, et on suppose l'existence d'un poids de Haar φ sur A vérifiant une condition d'invariance à gauche,

$$\text{Id} \otimes \varphi \circ \Delta = 1\varphi \quad (\text{sur } A_+), \quad (13a)$$

et deux autres axiomes (13b) et (13c) impliquant l'antipode. Du point de vue algébrique, on doit abandonner la counité ε (et donc aussi (11)). Les axiomes (6), (7), (10), (12) et (13) définissent alors la catégorie des algèbres de Kac-von Neumann, qui est munie d'une dualité prolongeant celle de Pontrjagin, et contient les algèbres $L^\infty(G)$ (caractérisées par leur commutativité), ainsi que leurs duals $\mathcal{L}(G) = W^*(\lambda(G))$ (où λ est la représentation régulière gauche de G sur $L^2(G)$). Une algèbre de Kac-von Neumann est dite de type compact lorsque son poids de Haar est fini. Cette théorie, très satisfaisante en ce qui concerne la dualité, présente néanmoins des défauts : absence de théorème d'existence pour le poids de Haar, manque d'exemples intéressants.

C'est la recherche d'exemples d'algèbres de Kac de dimension infinie qui ne sont pas de la forme $L^\infty(G)$ ou $\mathcal{L}(G)$ qui a mené, avec l'étude de l'équation de Yang-Baxter quantique, à la découverte

d'une autre classe de groupes quantiques (G.I. Kac et V.G. Paljutkin, 1964 ; V.G. Drinfel'd [19] et M. Jimbo [24], 1986). On s'intéresse cette fois à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} (simple complexe) d'un groupe de Lie classique et on déforme explicitement son algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$, en déformant (avec un paramètre t) les relations de Weyl et Serres qui la définissent. On obtient ainsi une algèbre associative $U_t\mathfrak{g}$ que l'on interprète comme l'algèbre de Lie d'un «groupe de Lie quantique» et que l'on peut munir d'une structure d'algèbre de Hopf vérifiant les axiomes (6) à (11), par des formules explicites pour Δ , ε et S . Les représentations de $U_t\mathfrak{g}$, ainsi que l'algèbre des fonctions sur le groupe quantique correspondant, ont été étudiées en détail. Très riche en exemples intéressants particulièrement la physique mathématique, cette théorie manque cependant d'une formulation plus analytique qui la ferait rentrer dans le cadre de la géométrie non commutative et permettrait de formaliser le passage du groupe de Lie quantique à son algèbre de Lie.

La notion de groupe quantique qui constitue plus particulièrement le cadre de ma thèse a été introduite en 1988 par S.L. Woronowicz dans [45]. Le cadre est celui des C^* -algèbres unifères : on déforme les algèbres des fonctions continues sur les groupes compacts. Leur structure donne lieu à la définition suivante — par rapport aux algèbres de Hopf de dimension finie on ne conserve que les axiomes (6) et (7), et on ajoute une condition de densité qui correspond à la régularité (ou «simplifiabilité») du monoïde sous-jacent au groupe étudié. On utilise le produit tensoriel spatial de C^* -algèbres.

Définition On appelle C^* -algèbre de Hopf unifère une C^* -algèbre A munie d'un morphisme de C^* -algèbres unifères $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ vérifiant $(\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta$. (A, Δ) est dite **bisimplifiable** si

$$\overline{\Delta(A)1 \otimes A} = \overline{\Delta(A)A \otimes 1} = A \otimes A. \quad (14)$$

Dans la catégorie des C^* -algèbres de Hopf unifères bisimplifiables, les algèbres $C^0(G)$, avec G groupe compact, sont caractérisées par leur commutativité, comme l'établit le théorème suivant qui repose sur la théorie de Gelfand et Naïmark et le fait qu'un monoïde régulier compact est un groupe.

Théorème (cf. partie II, proposition 2) Soit (A, Δ) une C^* -algèbre de Hopf unifère, bisimplifiable et commutative. Soit G l'espace des caractères de A muni de la multiplication $\chi * \chi' = (\chi \otimes \chi') \circ \Delta$. G est un groupe compact pour cette loi, A est (canoniquement) isomorphe à $C^0(G)$ et $\Delta(f)(r, s) = f(rs)$ si on identifie A à $C^0(G)$ et $A \otimes A$ à $C^0(G \times G)$.

On considère donc une C^* -algèbre de Hopf unifère bisimplifiable A (non nécessairement commutative) comme l'algèbre des fonctions continues sur un «groupe quantique compact». Il est intéressant d'étendre au cas non commutatif la notion de représentation de dimension finie, ainsi que celle de mesure. C'est ce que fait la définition ci-dessous : en effet une représentation de dimension finie $v \in C^0(G, L(E))$ s'identifie à un élément de $L(E) \otimes C^0(G)$. Si $v = \sum v_i \otimes a_i$ et $w = \sum w_j \otimes b_j$, $v \oplus w = \sum v_i w_j \otimes a_i \otimes b_j$ est un élément de $L(E) \otimes C^0(G) \otimes C^0(G) \simeq C^0(G \times G, L(E))$ et on a $v \oplus v(g, h) = v(g)v(h)$ et $\text{Id} \otimes \Delta(v)(g, h) = v(gh)$.

Définition Soit E un C -espace vectoriel de dimension finie. On appelle **représentation** sur E du groupe quantique associé à (A, Δ) un élément v de $L(E) \otimes A$ tel que

$$\text{Id} \otimes \Delta(v) = v \oplus v.$$

On appelle **mesure** sur G tout élément ω de A^* . Une mesure $\varphi \in A^*$ est dite **invariante à gauche** si

$$\forall a \in A \quad (\text{Id} \otimes \varphi) \circ \Delta(a) = \varphi(a)1.$$

On définit de même la notion d'**invariance à droite**, et on appelle **mesure de Haar** sur G un état sur A invariant à gauche et à droite.

Le premier atout de la théorie de Woronowicz est la possibilité de *démontrer* l'existence d'une unique mesure de Haar φ sur un groupe quantique compact G (cf. [27] ou partie II, théorème 1). φ constitue en particulier en outil précieux pour l'étude des représentations inversibles de G , et permet d'aboutir à des résultats très semblables à ceux de la théorie de Weyl (complète réductibilité, relations d'orthogonalité de Schur, ...). On montre en particulier que les éléments de A de la forme $e_{ij}^* \otimes \text{Id}(v)$, où v est une représentation de dimension finie, et (e_{ij}) , une base de matrices élémentaires dans $L(E)$, engendrent une sous-algèbre \mathcal{A} dense dans A . On dispose sur \mathcal{A} d'un antipode S et d'une counité ε vérifiant (6) – (12), sauf (10) qui est affaibli en :

$$S(ab) = S(b)S(a), \quad S(S(a^*)^*) = a. \quad (10')$$

Le passage de (10) à (10') revient à lever l'exigence d'unimodularité pour les groupes quantiques compacts, alors que les algèbres de Kac-von Neumann de type compact sont automatiquement unimodulaires. En fait les groupes quantiques compacts contiennent strictement les algèbres de Kac-von Neumann de type compact : cf. [1]. Dans le cas classique, les $e_{ij}^* \otimes \text{Id}(v)$ sont les coefficients des représentations de G , et $\mathcal{A} = C^\infty(G)$.

Lorsque \mathcal{A} est engendrée par les coefficients d'une seule représentation de dimension finie u , on dit que le groupe quantique compact G est matriciel. C'est ce cadre qu'on a adopté dans la partie II de ce mémoire, le cadre général s'en déduit facilement par limite inductive. De plus il contient de nombreux exemples intéressants, qui constituent le second atout de la théorie de Woronowicz. En particulier on est capable de construire le groupe quantique compact matriciel correspondant au groupe quantique $U_t \mathfrak{g}$ (pour \mathfrak{g} de type A, B, C ou D), en étudiant les représentations de $U_t \mathfrak{g}$ puis en appliquant la dualité de Tannaka et Krein étendue aux groupes quantiques compacts matriciels (cf. [33, 47, 34]). Inversement on sait construire un calcul différentiel sur les groupes quantiques compacts (de manière non canonique, cf. [48]) et on espère retrouver ainsi les groupes quantiques de Jimbo et Drinfel'd.

L'extension des groupes quantiques compacts de Woronowicz au cas localement compact fait actuellement l'objet de recherches très actives : cf. par exemple [31, 50] et aussi [26] où on trouve des axiomes simples, bien qu'incluant l'existence de la mesure de Haar. Ces travaux font largement appel à la théorie des C^* -algèbres non unifères : multiplicateurs, éléments affiliés, poids d'une C^* -algèbre ... L'objet de ma thèse est l'étude des C^* -algèbres sous-jacentes aux groupes quantiques compacts matriciels «classiques» (ie provenant des algèbres $U_t \mathfrak{g}$) et, en premier lieu, de la C^* -algèbre A_{t^2} associée au groupe quantique $SU_{t^2}(N)$ qui a déjà été décrite en détail dans le cas $N = 2$. Les questions que l'on peut se poser sont nombreuses : quels sont les caractères de A_{t^2} ? Quel est son type? Quel est son spectre? Quelle est sa K -théorie? Quelle est la dépendance par rapport au paramètre t ? J'ai déjà établi à l'issue de mon DEA la continuité du champ des C^* -algèbres A_{t^2} (résultat qui avait été obtenu dans [5] dans le cas $N = 2$).

Première partie

Équivalence entre
Bosons et Fermions

Mémoire de Maîtrise
sous la direction de Bernard Julia
mercredi 10 septembre 1997

Avertissement

La présentation de la théorie des champs adoptée en A) et B) est principalement tirée de [3, 4]. Les résultats de bosonisation exposés dans ce cadre proviennent de [28] et [11], l'exposition des calculs étant cependant plus détaillée dans ce mémoire. La section B)8) contient une présentation originale des opérateurs de création de solitons. Dans la partie mathématique, on a principalement exposé les résultats de [22], [36] et [21], en insistant sur les similitudes et les différences avec les méthodes des physiciens.

Introduction

Les premiers résultats d'équivalence entre bosons et fermions furent établis par des physiciens, en particulier Skyrme, Coleman et Mandelstam, au milieu des années 70, avant que des mathématiciens y relèvent des ressemblances avec certains objets de leurs études. Ces recherches ont depuis donné lieu à de nombreux échanges entre les deux communautés. C'est ce sujet, à l'interface des mathématiques et de la physique, que nous nous proposons d'étudier ici.

Les particules élémentaires se divisent entre fermions, qui vérifient le principe d'exclusion de Pauli, et bosons, qui ne le vérifient pas : on peut placer deux bosons dans le même état au même endroit. Dans l'espace usuel à trois dimensions, les fermions sont également caractérisés par un spin demi-impair (c'est par exemple le cas de l'électron), tandis que les bosons, comme le photon, ont un spin entier. Ces propriétés sont fondamentales pour toute la physique microscopique : le caractère fermionique de l'électron permet par exemple d'expliquer la structure électronique des atomes, tandis que le caractère bosonique du photon intervient dans des phénomènes tels que l'émission laser ou la condensation de Bose. C'est par ailleurs un résultat classique et élémentaire de mécanique quantique qu'un système lié de deux fermions se comporte comme un boson («addition des spins»), l'objet de notre étude sera inversement la mise en évidence de systèmes bosoniques ayant un comportement fermionique. Nous espérons ainsi établir une «équivalence» entre bosons et fermions, c'est-à-dire montrer que le même objet mathématique (ou deux objets mathématiques isomorphes) peuvent décrire, au sens de règles d'interprétation classiques, des systèmes fermioniques et bosoniques.

Nous introduirons dans une première partie la théorie quantique des champs, cadre de l'étude des bosons et fermions, à partir des postulats de base de la mécanique quantique et de la relativité restreinte, et par deux constructions (première et seconde quantification) qui, dans le cas des théories usuelles, conduisent à une équivalence onde-corpuscule. Puis nous présenterons en second lieu les résultats obtenus en physique pour l'équivalence entre fermions et bosons (en dimension 1 d'espace) ; ce sera par ailleurs l'occasion d'utiliser des techniques classiques en théorie des champs : propagateurs, champs libres dans une théorie avec interaction, théorème de Wick, renormalisations (élémentaires) additives et multiplicatives. Enfin nous étudierons des constructions mathématiques qui débouchent sur des résultats analogues : opérateurs de vertex et représentations des groupes de boucle.

A) Théorie des champs

1) Procédure de quantification et covariance relativiste

Après avoir rappelé les bases de la modélisation classique d'un système de particules, nous introduisons d'une part sa modélisation quantique (en particulier dans la représentation de Heisenberg) et d'autre part sa modélisation relativiste (restreinte). Par modélisation on entend des objets mathématiques, des règles d'interprétation, et des prescriptions pour l'équation d'évolution.

a) Formalisme hamiltonien

Un système de particules est classiquement décrit par n coordonnées généralisées $q = (q^i)$ (fonctions réelles du temps) et leurs dérivées temporelles (espace des configurations à $2n$ dimensions). Les équations du mouvement se mettent sous la forme lagrangienne :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0, \quad (1)$$

qui traduit un principe variationnel pour l'action $S = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt$ où $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ est le lagrangien du système, défini sur l'espace des configurations.

On passe à la formulation hamiltonienne en introduisant un troisième jeu de variables, $p = (p_i)$ (duales de Legendre des q) ; l'espace des phases (sous-variété de dimension $2n$ de \mathbb{R}^{3n}) est défini par les équations :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}). \quad (2)$$

Un point y est repéré par les coordonnées (q^i, p_i) et le hamiltonien du système y est donné par :

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

(où on a inversé (2) pour éliminer \dot{q}). Les équations du mouvement s'écrivent alors en termes des p_i et q^i seulement :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = \dot{p}_i,$$

ou encore, avec le crochet de Poisson :

$$\dot{q}^i = \{\mathcal{H}, q^i\}_{PB} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{\mathcal{H}, p_i\}_{PB}, \quad (3)$$

où on note de manière classique $\{f, g\}_{PB} = \sum_i \partial_{p_i} f \partial_{q^i} g - \sum_i \partial_{q^i} f \partial_{p_i} g$.

b) Description quantique

L'état quantique de ce même système de particules est décrit par un vecteur $|\psi(t)\rangle$ d'un espace de Hilbert complexe \mathcal{E} . Celui-ci est muni de deux familles complètes et sans dégénérescence d'opérateurs hermitiens commutants, $\hat{p} = (\hat{p}_i)$ et $\hat{q} = (\hat{q}^i)$, reliées par les relations de commutation

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}.$$

L'interprétation se fait en termes de probabilité de mesure : les résultats possibles d'une mesure de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée sur le système dans l'état $|\psi(t)\rangle$ sont les valeurs propres q^i de l'opérateur \hat{q}^i («observable»), et la probabilité que le résultat de cette mesure soit q est la norme au carré de la projection du vecteur d'état (normé) sur le sous-espace propre de \hat{q}^i associé à q (l'état du système après la mesure étant par ailleurs décrit par cette projection). Autrement dit, si on note $(|q^1, \dots, q^n\rangle)$ les vecteurs propres communs aux \hat{q}^i associées aux valeurs propres q^1, \dots, q^n , les probabilités de mesure pour la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, sur l'état $|\psi(t)\rangle$, sont données par

$$P_{|\psi(t)\rangle}(q^i) = \sum_{(q^j)_{j \neq i}} |\langle q^1, \dots, q^n | \psi(t) \rangle|^2.$$

On voit que la valeur d'une observable n'est prévisible avec probabilité 1 que pour un système dans un état propre de cette observable, et que la valeur moyenne de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée sur l'état $|\psi(t)\rangle$ est tout simplement $\langle \psi(t) | \hat{q}^i | \psi(t) \rangle$.

L'opérateur hamiltonien (qui est aussi l'observable «énergie») est habituellement défini à partir du hamiltonien classique, comme fonctionnelle de \hat{p} et \hat{q} : $\hat{H} = \mathcal{H}(\hat{p}, \hat{q})$ (\hat{p} et \hat{q} ne commutant pas cela peut en fait définir plusieurs opérateurs — on examinera plus tard ce problème d'ordre, il est fortement relié au problème de renormalisation) et on postule l'équation d'évolution du vecteur d'état (représentation de Schrödinger) :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (4)$$

Une base de solutions $(|\psi_E(t)\rangle)$ s'obtient très simplement si on connaît une base propre $(|E\rangle)$ de \hat{H} (indicée par les valeurs propres E associées, avec multiplicité éventuelle), par la formule : $|\psi_E(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |E\rangle$. On supposera dans la suite que les spectres des hamiltoniens utilisés sont discrets (ce qui est le cas dans les applications).

Soit \hat{O} un opérateur sur l'espace des états \mathcal{E} et posons $\tilde{O}(t) = e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{O} e^{-it\hat{H}/\hbar}$. On a d'après (4) : $|\psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}/\hbar} |\psi(0)\rangle$, d'où on déduit $\langle \psi(t) | \hat{O} | \phi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \tilde{O}(t) | \phi(0) \rangle$. Ceci assure que les règles d'interprétation précédentes peuvent également s'appliquer en utilisant des vecteurs d'état

constants et les opérateurs $\tilde{O}(t)$: c'est la représentation de Heisenberg. L'équation d'évolution (4) donne celle des opérateurs de Heisenberg (on a $\hat{H} = \tilde{H}$) :

$$\frac{d\tilde{O}(t)}{dt} = i\hbar[\tilde{H}, \tilde{O}(t)]. \quad (5)$$

On obtient pour les observables \hat{p} et \hat{q} :

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, \tilde{q}^i] \quad \text{et} \quad \dot{\tilde{p}} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, \tilde{p}_i].$$

On obtient ainsi des équations analogues à (3), on dit qu'on a quantifié les équations classiques du mouvement.

c) Covariance classique

On peut d'autre part s'intéresser à la description classique du même système dans plusieurs référentiels simultanément : une fois l'étude réalisée dans un référentiel \mathfrak{R}_0 (coordonnées (q_i)), on souhaite avoir facilement accès à l'évolution des grandeurs qui le caractérisent dans d'autres référentiels. C'est l'objet de la modélisation relativiste du système, pour laquelle on introduit, parallèlement à l'espace des phases, l'espace «ambient» ou «physique» V et surtout un groupe de transformations \mathcal{G} de cet espace (V acquiert sa véritable importance dans l'introduction des théories de champs, cf. 2)). On s'intéresse ainsi à une classe de référentiels $\mathfrak{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{R}_0)$ où \mathcal{R} décrit \mathcal{G} . Une grandeur physique est caractérisée par l'espace vectoriel E dans lequel elle prend ses valeurs, et par $\rho : \mathcal{G} \rightarrow L(E)$ qui décrit la manière dont elle se transforme lors d'un changement de référentiel : $\rho(\mathcal{R})$ associe à une valeur de la grandeur dans \mathfrak{R}_0 la valeur correspondante mesurée dans $\mathfrak{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{R}_0)$. Il est clair que ρ doit être une représentation linéaire du groupe \mathcal{G} dans E . L'espace des phases lagrangien est alors la somme directe des espaces E associé aux grandeurs caractérisant l'état du système, il est naturellement muni d'une représentation de \mathcal{G} .

Dans les théories que nous étudierons, l'espace affine ambient V a une dimension temporelle et une ou trois dimensions spatiales : $x = (t, \vec{x}) = x^\mu$ (coordonnées contravariantes). Il est muni de la métrique de Minkowski : $x^2 = t^2 - \vec{x}^2 = x_\mu x^\mu$ avec $x_\mu = (x^0, -\vec{x}) = g_{\mu\nu} x^\nu$ (coordonnées covariantes). Les opérateurs de dérivation sont notés ∂_μ , $\nabla = (\partial_\mu)$, $\vec{\nabla} = (\partial_i)$, et on utilise les notations d'Einstein (sommation sur les indices répétés, indices grecs pour les dimensions temporelle et spatiales, indices latins pour les dimensions spatiales uniquement).

Le groupe de transformations choisi est celui de Poincaré, engendré par les translations (spatio-temporelles), les rotations spatiales (quand il y a trois dimensions d'espace) et les rotations hyperboliques spatio-temporelles (correspondant aux passages entre référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre). On utilise en particulier les grandeurs et représentations associées suivantes :

- Représentation triviale sur $E = \mathbb{C}$ (scalaires, non modifiés par un changement de référentiel).
- Représentation vectorielle sur $E = \mathbb{R}^4$ (vecteurs) : $\rho(\mathcal{R})$ est simplement la partie vectorielle de l'application affine \mathcal{R} . Le vecteur d'énergie-impulsion ou celui de champ électromagnétique se transforment selon cette représentation.
- Représentation spinorielle sur $E = \mathbb{C}^4$ (spineurs pour un espace à trois dimensions) : si \mathcal{R} est caractérisé par le vecteur de rotation $\vec{\omega} = (\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$ et le vecteur vitesse $\vec{v} = (c \tanh(\omega_{0i}))_i$, on pose $\rho(\mathcal{R}) : G \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} G$ avec $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ et $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Pour les translations \mathcal{R} , on pose $\rho(\mathcal{R}) = \text{Id}$. Les matrices γ sont (par exemple) données par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons que cela définit en fait une représentation projective : on a $\rho(\mathcal{R}_1) \circ \rho(\mathcal{R}_2) = c(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \rho(\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2)$ où le «cocycle» c est de module 1 mais ne vaut pas identiquement 1 (par exemple, seule une rotation axiale d'angle 8π laisse un spin invariant ; un tour unique le transforme en son opposé). Le véritable groupe de symétrie de la théorie est (l'extension par les translations de) le groupe de spin, qui recouvre le groupe de Lorentz.

- Représentation spinorielle sur $E = \mathbb{C}^2$ (spineurs pour un espace à une dimension) : les formules sont les mêmes, avec un seul paramètre $\omega_{01} = -\omega_{10}$ et les matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Dans toutes ces représentations, seul le sous-groupe de Lorentz du groupe de Poincaré agit non trivialement, ce ne sera cependant plus le cas lorsqu'on passera aux représentations induites pour les champs.

Remarquons pour finir qu'en multipliant des grandeurs physiques associées à des représentations de \mathcal{G} on aboutit à d'autres grandeurs associées à d'autres représentations, qui se déduisent des premières :

$$\rho_H(\mathcal{R}).H = (\rho_F(\mathcal{R}).F) \cdot (\rho_G(\mathcal{R}).G) \quad \text{si } H = F \cdot G. \quad (7)$$

Les calculs se mènent facilement pour les représentations précédentes (en utilisant les transformations infinitésimales) et on constate que si ψ est un spineur, $\bar{\psi}\psi$ est un scalaire et $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ est un vecteur (où on note $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$). De même, si v est un vecteur, v^2 est un scalaire.

Les prescriptions de la relativité restreinte pour l'équation du mouvement se résument à une exigence de covariance : on dit que la théorie est covariante si l'équation d'évolution prend la même forme dans tous les référentiels \mathfrak{R} déduits de \mathfrak{R}_0 par action du groupe \mathcal{G} (principe de relativité). Autrement dit, si le système est décrit dans \mathfrak{R}_0 par des variables (G_i) caractérisées par les couples (E_i, ρ_i) (par exemple : temps, position, vitesse, ...), et par l'équation d'évolution $f(G_1, \dots, G_n) = 0$, on doit avoir :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad f(G_1, \dots, G_n) = 0 \iff f(\rho_1(\mathcal{R}).G_1, \dots, \rho_n(\mathcal{R}).G_n) = 0.$$

Dans le cas d'un système décrit par des équations lagrangiennes (1), la covariance est assurée par l'invariance de l'action par changement de référentiel :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathcal{L}(\rho_q(\mathcal{R}).q(t), \rho_{\dot{q}}(\mathcal{R}).\dot{q}(t)) dt. \quad (8)$$

Les quantités scalaires sont particulièrement intéressantes de ce point de vue car elles sont invariantes sous l'action du groupe de Poincaré et peuvent donc être utilisées dans des lagrangiens pour construire des théories covariantes (on trouve des exemples de constructions de théories des champs avec ce point de départ dans [32]), d'où l'intérêt des règles de calcul (7) lorsque le système est décrit par des vecteurs ou des spineurs.

Une conséquence intéressante de la covariance, lorsque \mathcal{G} contient des groupes à un ou plusieurs paramètres réels, est l'existence de constantes du mouvement simples déduite de l'expression différentielle de la condition d'invariance (8) (théorème de Noether). Ainsi, pour un système de particules classiques, l'invariance par les translations temporelles et spatiales mène aux conservations de l'énergie et de la quantité de mouvement, et l'invariance sous le groupe des rotations spatiales entraîne la conservation du moment cinétique. Nous présenterons plus loin de telles lois de conservation dans le cadre de la théorie des champs relativistes.

2) Cas des champs : une théorie quantique relativiste

a) Champs classiques

Les formalismes lagrangien et hamiltonien pour les champs présentent des particularités motivées par l'interprétation suivante. Un champ est un système à une infinité de degrés de liberté $\phi(\vec{x}) = (\phi_r(\vec{x}))_r \in E$, qui peuvent être considérés comme les coordonnées de particules évoluant dans l'espace vectoriel E (la «charge» portée par le champ), et indicées par les points de l'espace ambiant V . On peut par exemple penser à la surface d'une membrane en vibration (comme limite d'un réseau de points matériels en interaction). Le lagrangien est alors une fonctionnelle de ϕ et $\dot{\phi}$, mais on suppose en fait que \mathcal{L} découle d'une densité lagrangienne \mathcal{L}_d fonction de l'intensité du champ, $\phi(\vec{x})$, et de ses dérivées, $\partial_\mu\phi(\vec{x})$ (ce qui revient à limiter les couplages aux distances infinitésimales dans l'interprétation évoquée, et est motivé par un principe de causalité qui interdit les influences hors du cône de lumière) :

$$\mathcal{L}(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = \int \mathcal{L}_d(\phi(t, \vec{x}), \partial_i\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{x})) d^3\vec{x}.$$

Ce choix entraîne la localité des équations lagrangiennes (1) qui s'écrivent :

$$\forall x \in \mathcal{E} \quad \forall r \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial (\partial_\mu \phi_r)}(\phi(x), \nabla \phi(x)) \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \phi_r}(\phi(x), \nabla \phi(x)),$$

ou de manière plus condensée :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \phi_r}. \quad (9)$$

Elles dérivent de l'action $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}_d(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x$. Il en découle immédiatement que le hamiltonien peut lui aussi s'écrire

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \int \mathcal{H}_d(\phi(\vec{x}), \vec{\nabla} \phi(\vec{x}), \pi(\vec{x})) d^3\vec{x},$$

avec $\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \dot{\phi}_r}(\phi, \nabla \phi)$ et $\mathcal{H}_d(\phi, \vec{\nabla} \phi, \pi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)$,

et que les équations hamiltoniennes se mettent sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial \pi_r} = \dot{\phi}_r \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial \phi_r} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}_d}{\partial (\partial_i \phi_r)} = \dot{\pi}_r.$$

Ce sont ces équations que nous retrouverons une fois effectuée la quantification.

b) Champs quantiques

La procédure de quantification décrite en 1) s'applique sans difficulté au système classique décrit ci-dessus (on a simplement une infinité de particules). On introduit sur un espace de Hilbert \mathcal{E} deux ensembles complets et indépendants d'opérateurs hermitiens commutant, $(\phi_r(\vec{x}, t))$ et $(\pi_r(\vec{x}, t))$ (en représentation de Heisenberg), vérifiant les relations de commutation à temps égal :

$$[\phi_r(\vec{x}, t), \phi_s(\vec{x}', t)] = 0, \quad [\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] = 0,$$

et $[\phi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{rs}$. (10)

Chaque famille admet une base orthonormale de vecteurs propres («shaped states»), repérés par leurs valeurs propres qui forment un champ classique $\Phi : \forall x \in V \phi(x) |\Phi\rangle = \Phi(x) |\Phi\rangle$ (pour ce qui concerne les notations, on a abandonné les tildes, et les valeurs propres sont désignées par des majuscules grecques).

L'opérateur hamiltonien est $H = \mathcal{H}(\phi, \vec{\nabla} \phi, \pi)$ où les champs d'opérateurs sont pris à l'instant $t = 0$. Le passage de ϕ à l'opérateur $\nabla \phi$ ne pose pas de problème, par contre les problèmes d'ordre évoqués en 1) sont à nouveau passés sous silence, et avec eux les difficultés liées à la construction d'un modèle explicite répondant à ces prescriptions. Les équations d'évolution,

$$\partial_t \pi_r = \frac{i}{\hbar} [H, \pi_r] \quad \text{et} \quad \partial_t \phi_r = \frac{i}{\hbar} [H, \phi_r], \quad (11)$$

s'explicitent alors dans les théories usuelles grâce aux relations de commutation (10) et à la définition du hamiltonien en termes des opérateurs ϕ et π , on obtient des relations appelées équations de champ dont on verra des exemples lors de la présentation des théories de Dirac et Klein-Gordon en B).

c) Champs relativistes

D'autre part, les considérations de covariance classique prennent également une forme particulière dans le cas des champs. \mathcal{G} est toujours un groupe de symétries de l'espace ambiant V (éventuellement recouvert par un groupe de spin). Si une représentation ρ de \mathcal{G} est associée à l'espace E (caractéristiques de la «charge» portée par le champ), la représentation ρ_ϕ associée à l'espace E^V (caractéristiques de la variable «champ») est donnée par :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad (\rho_\phi(\mathcal{R}) \cdot \phi)(x) = \rho(\mathcal{R}) \cdot \phi(\mathcal{R}^{-1}(x)) \quad (12)$$

(c'est à priori un choix, ces représentations sont appelées représentations induites). On opère une construction analogue pour $\nabla \phi$ à partir de la représentation ρ_∇ associée au gradient de charge

(par exemple, lorsque G est un scalaire, ∇G est un vecteur). La condition d'invariance de l'action s'écrit dans ce cadre

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad \forall \mathcal{D} \quad \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}_d(\rho(\mathcal{R}) \cdot \phi(x), \rho_{\nabla}(\mathcal{R}) \cdot \nabla \phi(x)) d^4x = \int_{\mathcal{R}(\mathcal{D})} \mathcal{L}_d(\phi(x), \nabla \phi(x)) d^4x, \quad (13)$$

où on a utilisé la définition (12) de ρ_{ϕ} et $\rho_{\nabla \phi}$, et un changement de variable.

Ces remarques, dans le cadre du groupe de Poincaré agissant sur l'espace de Minkowski, vont nous permettre d'expliciter les conservations données par le théorème de Noether. En utilisant par exemple les translations infinitésimales ($\mathcal{R}(x) = x + \varepsilon$, $\rho_G(\mathcal{R}) = \text{Id}$, $\rho_{\nabla G}(\mathcal{R}) = \text{Id}$), on explicite la condition (13) en :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)}{\partial \phi_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu}$$

(le membre de gauche est un terme de surface, il résulte de la variation du domaine d'intégration), soit encore grâce aux équations de champ (9) :

$$\partial^\mu \mathcal{I}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{I}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r.$$

Ces lois de conservation différentielles (champs à divergence nulle) donnent par intégration sur l'espace quatre constantes scalaires du mouvement :

$$\mathcal{P}_\nu = \int (\pi_r \partial_\nu \phi_r - g_{0\nu} \mathcal{L}_d(\phi, \nabla \phi)) d^3 \vec{x}. \quad (14)$$

De même, en exprimant l'invariance sous le groupe de Lorentz (à six paramètres réels), on obtient (pour un champ spinoriel, ie à 4 composantes) la conservation de

$$\mathcal{M}^{\nu\lambda} = \int (x^\nu \mathcal{I}^{0\lambda} - x^\lambda \mathcal{I}^{0\nu} + \pi_r \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \phi_s) d^3 \vec{x} \quad \text{où} \quad \Sigma_{rs}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{rs}. \quad (15)$$

d) Covariance relativiste des champs quantiques

Nous aimerions maintenant étudier des théories des champs quantiques et relativistes : on utilise pour cela les objets quantiques (en représentation de Heisenberg, pour éviter de privilégier le temps par rapport aux variables d'espace) et les objets relativistes, c'est-à-dire d'une part les observables et l'espace de Hilbert \mathcal{E} introduits au début de la section, et d'autre part une représentation U (unitaire) de \mathcal{G} sur \mathcal{E} , avec les mêmes règles d'interprétation (probabilité de mesure et changements de référentiel). L'équation du mouvement doit être de la forme (5) avec un hamiltonien H compatible avec U . On impose en fait une condition plus forte en exigeant que les éléments de matrice (et en particulier les valeurs moyennes) des observables se transforment comme les quantités physiques qu'elles représentent, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad \langle \Phi'_1 | \phi(x') | \Phi'_2 \rangle &= \rho_G(\mathcal{R}) \cdot \langle \Phi_1 | \phi(x) | \Phi_2 \rangle, \\ \text{où } x' = \mathcal{R}(x) \text{ et } |\Phi'\rangle &= U(\mathcal{R}) |\Phi\rangle, \\ \text{ie } \forall \mathcal{R} \in \mathcal{G} \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad U(\mathcal{R})^{-1} \phi(\mathcal{R}(x)) U(\mathcal{R}) &= \rho_G(\mathcal{R}) \cdot \phi(x) \quad (\text{id avec } \pi). \end{aligned} \quad (16)$$

Une méthode générale pour aboutir à l'existence de U dans le cas du groupe de Poincaré est de la rechercher sous les formes

$$\begin{aligned} U(\mathcal{R}) &= e^{i\varepsilon_\mu P^\mu} \quad (\mathcal{R} \text{ translation}) \quad \text{ou} \\ U(\mathcal{R}) &= e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \quad (\mathcal{R} \text{ transformation de Lorentz}), \end{aligned}$$

avec P^μ , $M^{\mu\nu}$ des observables a priori quelconques sur \mathcal{E} . La condition de covariance (16) est alors l'exponentiation de la forme infinitésimale suivante :

$$\begin{aligned} i[P^\mu, \phi_r(x)] &= \partial^\mu \phi_r(x) \quad \text{et} \quad i[M^{\mu\nu}, \phi_r(x)] = x^\mu \partial^\nu \phi_r(x) - x^\nu \partial^\mu \phi_r(x) + \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \phi_s(x), \\ i[P^\mu, \pi_r(x)] &= \partial^\mu \pi_r(x) \quad \text{et} \quad i[M^{\mu\nu}, \pi_r(x)] = x^\mu \partial^\nu \pi_r(x) - x^\nu \partial^\mu \pi_r(x) + \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \pi_s(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Dans toutes les théories étudiées ultérieurement on pourra vérifier que les opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ correspondant aux constantes classiques du mouvement (14) et (15) (obtenues par le théorème de Noether), conviennent. Ce sont des théories quantiques relativistes des champs.

[On reconnaît d'autre part $H = P^0$ et on voit que les équations d'évolution (11) sont contenues dans celles de covariance (17), qui suffisent donc avec les relations de commutation (10) à définir la théorie (même si ce sont bien les équations de champ et l'expression de H qui se révèlent les plus utiles dans les calculs).]

3) Seconde quantification et équivalences

a) Systèmes de particules quantiques

Revenons à la procédure de quantification de 1) pour un système de particules (en abandonnant les coordonnées généralisées : $V = \mathbb{R}^{3n}$). Une réalisation couramment utilisée du vecteur d'état $|\psi\rangle$ est la fonction d'onde $\Psi(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) = \langle \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n | \psi \rangle$, qui indique l'amplitude de probabilité de détection des particules en chaque point de l'espace. Les opérateurs vectoriels \hat{x}^i et \hat{p}_i agissent alors sur les fonctions d'onde par

$$\begin{aligned} (\vec{P}_i \Psi)(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) &= i\hbar \vec{\nabla}_i \Psi(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n), \\ (\vec{X}^i \Psi)(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) &= \vec{x}^i \Psi(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n), \end{aligned}$$

et l'équation de Schrödinger (4) peut se réécrire $\mathcal{H}(\vec{P}, \vec{X})\Psi = i\hbar \partial_t \Psi$. Plaçons-nous dans le cas où les particules sont indépendantes et décrites par des hamiltoniens h_i (ie $\mathcal{H}(\hat{p}, \hat{x}) = \sum h_i(\hat{p}_i, \hat{x}^i)$), et supposons connues les solutions de l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde d'une particule :

$$h_i(\vec{P}_i, \vec{X}^i)\psi_i = i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \quad (18)$$

ou, ce qui revient au même, les solutions de l'équation aux valeurs propres (supposées dénombrables) :

$$\forall k \quad h_i(\vec{P}_i, \vec{X}^i)\varphi_{i,k} = E_{i,k}\varphi_{i,k} \quad (\psi_{i,k}(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{i,k}t}\varphi_{i,k}(\vec{x})).$$

Alors on dispose immédiatement des fonctions d'onde solutions de l'équation pour le système :

$$\Psi_{k_1, \dots, k_n}(t, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) = \prod \psi_{i,k_i}(\vec{x}^i, t). \quad (19)$$

Notons les relations d'orthogonalité vérifiées par les $\psi_{i,k}$:

$$\sum_k \psi_{i,k}^*(\vec{x}, t)\psi_{i,k}(\vec{x}', t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{et} \quad \int \psi_{i,k}^*(\vec{x}, t)\psi_{i,k'}(\vec{x}, t)d^3\vec{x} = \delta_{kk'}. \quad (20)$$

On ne sait décrire ainsi que des systèmes ayant un nombre fixe de particules. Pour décrire un système à un nombre variable de particules identiques (ie $\forall i \quad h_i = h$, en particulier Ψ_{k_1, \dots, k_n} définie par (19) est symétrique), on construit de manière plus générale un espace de Hilbert (dit «de Fock») en se donnant une base orthonormée d'états, $(|\alpha\rangle)_\alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots)$ et α_k est le nombre de particules dans l'état ψ_k (tous les états ne se décomposent pas sur cette base du fait de la complétion nécessaire à l'obtention d'un espace de Hilbert). On définit également l'opérateur d'annihilation pour l'état k par $a_k |\alpha\rangle = \sqrt{\alpha_k - 1} |\alpha - (\delta_{ik})\rangle$ et $a_k |0\rangle = 0$. Son adjoint est un opérateur de création : $a_k^\dagger |\alpha\rangle = \sqrt{\alpha_k} |\alpha + (\delta_{ik})\rangle$, et on a les relations de commutation :

$$[a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (21)$$

$N_k = a_k a_k^\dagger$ et $H = \sum E_k N_k$ sont clairement les observables respectives «nombre de particules dans l'état k » et «énergie», au sens des règles d'interprétation définies en 1), et sont diagonaux dans la base $(|\alpha\rangle)_\alpha$. Enfin H détermine l'équation d'évolution (4) de cette théorie quantique. On dit que cette dernière est obtenue par seconde quantification de la théorie quantique à une particule caractérisée par son hamiltonien h .

Introduisons les opérateurs

$$\phi^+(\vec{x}, t) = \sum \psi_k(\vec{x}, t)a_k \quad \text{et} \quad \phi^-(\vec{x}, t) = \phi^{+\dagger}(\vec{x}, t) = \sum \psi_k^*(\vec{x}, t)a_k^\dagger.$$

On vérifie à l'aide des relations d'orthogonalité (20) que $a_k = \int \psi_k^*(\vec{x}, t)\phi^+(\vec{x}, t)d^3\vec{x}$ (pour tout t) et que les états $|t, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n\rangle = \phi^-(\vec{x}^1, t) \cdots \phi^-(\vec{x}^n, t)|0\rangle$ forment une base orthogonale de l'espace des états. Cette base permet de définir pour un état $|\theta\rangle$ quelconque la fonction d'onde (indiquée par $n \in \mathbb{N}$) :

$$\Theta_n(t, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) = \langle 0 | \phi^+(\vec{x}^1, t) \cdots \phi^+(\vec{x}^n, t) | \theta \rangle, \quad (22)$$

qui s'interprète bien comme fonction d'onde pour la composante n -particulaire de $|\theta\rangle$, dans la mesure où pour un vecteur propre à m particules de H , $|\theta\rangle = \sum_{i=1}^m a_{k_i}^\dagger |0\rangle$, on obtient la fonction

(19) introduite précédemment : $\Theta_n = \delta_{mn} \Psi_{k_1, \dots, k_m}$. Un état quelconque s'écrit donc à l'instant t comme superposition d'états n -particulaires de fonctions d'onde Θ_n :

$$|\theta\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int \Theta_n(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n) \phi(\vec{x}^1, t)^- \cdot s\phi(\vec{x}^n, t)^- |0\rangle d^3\vec{x}.$$

Les états $|t, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n\rangle$ s'interprètent en particulier comme états particuliers du système, et $\phi^-(\vec{x}, t)$, comme opérateur de création de particule en \vec{x} .

Étudions de plus près ces opérateurs, ou plutôt les opérateurs hermitiens $\phi(\vec{x}, t) = \phi^+(\vec{x}, t) + \phi^-(\vec{x}, t)$. Les relations de commutation des a_k permettent de vérifier qu'à temps égal les $\phi(x)$ commutent. D'autre part H s'exprime en fonction de ϕ :

$$\begin{aligned} H &= \sum \delta_{kk'} a_k a_{k'}^\dagger E_k \\ &= \sum a_k a_{k'}^\dagger \int \psi_k(\vec{x}, t) \frac{\hbar}{i} \partial_t \psi_{k'}^*(\vec{x}, t) d^3\vec{x} \quad (\text{cf (18), (20)}) \\ &= \frac{\hbar}{i} \int \phi^+(\vec{x}, t) \partial_t \phi^-(\vec{x}, t) d^3\vec{x}, \end{aligned}$$

et les relations de commutation des a_k permettent d'obtenir celles des $\phi(x)$: $[\partial_t \phi^-(\vec{x}, t), \phi^-(\vec{x}', t)] = 0$ et $[\phi^+(\vec{x}', t), \phi^-(\vec{x}, t)] = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$, qui donnent :

$$\frac{i}{\hbar} [H, \phi^-(\vec{x}, t)] = \int [\phi^+(\vec{x}', t), \phi^-(\vec{x}, t)] \partial_t \phi^-(\vec{x}', t) d^3\vec{x}' = \partial_t \phi^-(\vec{x}, t).$$

On peut faire les mêmes calculs pour ϕ^+ et on obtient finalement l'équation d'évolution pour ϕ :

$$\frac{i}{\hbar} [H, \phi] = \dot{\phi}. \quad (23)$$

b) Équivalences

L'espace de Hilbert \mathcal{E} , muni d'une part de l'état vide $|0\rangle$ et des opérateurs de création a_k^\dagger , et d'autre part des observables $\phi(x)$, s'interprète donc à la fois comme espace des états d'une théorie particulière quantifiée et comme espace des états d'une théorie des champs (scalaire) quantifiée. De plus les vecteurs d'état ont la même équation d'évolution, déduite du même hamiltonien, dans les deux théories. On dit que les deux (modèles des) théories physiques étudiées sont équivalentes. Pour obtenir une théorie de champs vectoriels il suffit d'introduire plusieurs types de particules (avec éventuellement des termes d'interaction dans le hamiltonien).

Il n'est pas évident en général d'effectuer le chemin inverse, c'est à dire de mettre en évidence dans une théorie quantique de champs une théorie particulière. Supposons cependant que les équations d'évolution (11) d'une théorie obtenue par la première quantification se résolvent en $\phi(x) = \sum (\psi_k(\vec{x}, t) a_k + \psi_k^*(\vec{x}, t) a_k^\dagger)$ où les fonctions scalaires ψ_k vérifient des relations d'orthogonalité analogues à (20), et les opérateurs a_k , les relations de commutation (21). Si de plus le Hamiltonien peut se mettre sous la forme $\sum E_k a_k a_k^\dagger$, on voit que la théorie aurait pu être obtenue par seconde quantification d'une équation d'onde associée à un hamiltonien particulière h . On n'a pas à priori d'expression simple de h , mais la connaissance de ses états propres ψ_k et énergies propres E_k suffit. Il faut de plus choisir un état vide pour construire l'espace de Fock, on prend usuellement l'état propre de champ nul.

Les hypothèses précédentes seront (en gros) vérifiées dans les théories de champs libres que nous étudierons en B)3) et B)4), et c'est pourquoi on pourra parler à leur sujet d'équivalence onde-corpuscule : le même objet mathématique décrit un champ ou des particules selon la manière dont sont appliquées les règles d'interprétation quantiques. On voit par ailleurs que la dualité repose plus sur des relations entre opérateurs que sur des identifications directes entre états.

Ces particules sont-elles des bosons ou des fermions ? La réponse est immédiate puisqu'on dispose d'opérateurs de création qui nous permettent de placer autant de particules que l'on souhaite dans un même état ψ_k . La nature bosonique des théories construites apparaît également dans l'expression des fonctions d'onde n -particulaires (22) : les opérateurs $\phi(x)$ commutant à t fixé, elles sont symétriques. Si nous voulons disposer de théories fermioniques, nous devons donc en particulier remplacer ces commutations par des anticommutations. En fait la procédure de quantification

de 1) reste valide lorsqu'on remplace tous les commutateurs $[,]$ par des anticommutateurs $\{ , \}$ (des signes peuvent apparaître dans les équations de covariance, en particulier dans (16) lorsque qu'on utilise des anticommutateurs dans (17), et la représentation ρ est alors projective, ce qui est tout à fait acceptable puisque deux vecteurs colinéaires de \mathcal{E} décrivent le même état physique). De même on peut adapter 3) en imposant $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $a_k^\dagger |\alpha\rangle = 0$ si $\alpha_k^\dagger = 1$, alors tous les commutateurs sont remplacés par des anticommutateurs. On dispose donc de quatre procédures de quantification (champs et particules fermioniques et bosoniques) : est-il possible d'établir des équivalences entre fermions et bosons comme on en obtient entre ondes et corpuscules ?

B) Équivalence entre Fermions et Bosons en Physique

Nous introduisons tout d'abord deux outils très utiles en théorie des champs (propagateurs et champs libres), puis les théories, dites de Thirring et de Sine-Gordon, entre lesquelles ont été établis des résultats d'équivalence. La présentation du premier d'entre eux sera l'occasion de mettre en œuvre des techniques classiques en théorie des champs, et le second nous permettra de décrire plus précisément l'équivalence étudiée. Nous aurons à procéder à des renormalisation élémentaires : additives en 3), 4), 5), et 6) (ordres normaux), multiplicatives en 7).

1) Propagateurs usuels

Une idée naturelle (issue de l'optique et du théorème de Huyghens) en théorie classique des champs est de considérer l'évolution du champ entre t et $t' > t$ comme la propagation d'ondes émises à t en tous points, par le champ ϕ . Reste à savoir comment ces ondes se recomposent, c'est-à-dire quelle est l'intensité en (\vec{x}', t') de l'onde qui s'y est propagée depuis (\vec{x}, t) . Bien sûr, les propriétés de linéarité et superposabilité du champ imposent que cette intensité soit proportionnelle à $\phi(\vec{x}, t)$, mais cela ne suffit pas si on veut rester fidèle à l'évolution décrite par les équations de champ et on introduit un facteur multiplicatif, le propagateur de (\vec{x}, t) à (\vec{x}', t') . Finalement on est donc amené à l'expression :

$$\theta(t' - t)\phi(\vec{x}', t') = i \int G(\vec{x}', t', \vec{x}, t)\phi(\vec{x}, t)d^3\vec{x},$$

ou de manière plus condensée :

$$\theta(t' - t)\phi(x') = i \int G(x', x)\phi(x)d^3\vec{x}, \quad (24)$$

avec $\theta(t) = 1$ si $t > 0$, $\theta(t) = 0$ sinon (fonction de Heaviside). Si ϕ est un champ vectoriel, G est matriciel. La connaissance du propagateur G , s'il existe, est clairement équivalente à la résolution des équations de champ avec donnée initiale.

Lorsque l'équation de champ peut se mettre sous la forme $(i\partial_t + \mathcal{D})\phi = 0$ (\mathcal{D} opérateur linéaire, comme dans le cas de la théorie de Dirac), il vient par application de $i\partial_t + \mathcal{D}$ en x' :

$$i\delta(t - t')\phi(x') = i \int \phi(x)\mathcal{D}_{x'}G(x', x)d^3\vec{x},$$

donc G doit être solution de l'équation

$$(i\partial_t + \mathcal{D}_{x'})G(x', x) = \delta^4(x' - x).$$

Ceci ne définit pas G de manière unique et on constate en effet en remontant les équations que pour une telle fonction G , $\theta(t' - t)\phi(x') - i \int G(x', x)\phi(x)d^3\vec{x}'$ est solution de l'équation de champ, mais n'est pas nécessairement nulle. Il faut imposer à G des conditions aux limites pour retrouver (24), par exemple : $G(x', x) = 0$ pour $t' < t$. Si c'est possible, l'existence du propagateur est assurée.

Plus généralement, on s'intéresse aux solutions de l'équation de Green, définie pour des opérateurs de champ D plus généraux ($D = i\partial_t + \mathcal{D}$ dans le cas précédent) :

$$D_{x'}G(x', x) = \delta^4(x' - x), \quad (25)$$

(il s'agit d'inverser un opérateur non borné). Dans le cas des théories de Dirac ($D = i\gamma^\mu\partial_\mu - m$) et Klein-Gordon ($D = \partial_\mu\partial^\mu + m^2$), cf 3) et 4), l'invariance des équations par translation assure que les fonctions de Green peuvent se mettre sous la forme $S(x', x) = S(x' - x) \in M_4$ et $\Delta(x', x) = \Delta(x' - x) \in \mathbb{R}$ respectivement. On recherche en fait les transformées de Fourier \tilde{G} définies par

$$G(x' - x) = \int e^{-ip_\mu x^\mu} \tilde{G}(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (26)$$

En remplaçant dans (25) il vient, grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier et à l'expression $\delta^4(x' - x) = \int (2\pi)^{-4} \exp(-ip_\mu x^\mu) d^4p$:

$$\tilde{S}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu}{p^2 - m^2} \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (27)$$

On obtient alors les solutions de (25) en traitant l'intégration sur $p_0 \in \mathbb{R}$ de (26) par une intégration sur un chemin du plan complexe légèrement différent de \mathbb{R} (puis par un passage à la limite), qui évite les pôles $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ de \tilde{G} . De plus, si on referme ce chemin à l'infini dans un des demi-plans $\text{Im } p_0 > 0$ ou $\text{Im } p_0 < 0$ (selon le signe de x^0 et de manière à ce que l'exponentielle $\exp(ip_0 x^0)$ rende le terme correspondant nul dans le passage à la limite), la formule de Cauchy s'applique et on obtient, par exemple pour un chemin sous le pôle négatif et au-dessus du pôle positif :

$$S_F(x', x) = -i \int e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2|p_0|} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

$$\text{et } \Delta_F(x', x) = -i \int e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \frac{1}{2|p_0|} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3},$$

où $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ pour $t' > t$ et $p_0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ pour $t' < t$.

Dans ce cas on a donc des conditions aux limites différentes de celles qui donnent un propagateur vérifiant (24) : S_F et Δ_F , appelés propagateurs de Feynman, ont des fréquences positives dans le futur et des fréquences négatives dans le passé, ils interviennent dans le calcul des matrices de diffusion. Remarquons qu'il y a trois autres choix possibles pour le chemin dans le plan complexe, qui donnent d'autres conditions aux limites : notamment, en passant sous les deux pôles, on obtient des fonctions G nulles pour $t' < t$. C'est le cas des propagateurs suivants :

$$S_+(x', x) = \theta(t' - t)S^+(x', x) \quad \text{et} \quad \Delta_+(x', x) = \theta(t', t)\Delta^+(x', x),$$

où S^+ et Δ^+ sont les parties à fréquence positive de S et Δ :

$$S(x', x) = S^+(x', x) + S^-(x', x)$$

$$= -i \int \left(e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{2p_0} + e^{ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2p_0} \right) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

$$\text{et } \Delta(x', x) = \Delta^+(x', x) + \Delta^-(x', x)$$

$$= -i \int \left(e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} - e^{ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \right) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3},$$

avec $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. On utilisera enfin dans le paragraphe suivant deux autres solutions de l'équation de Green (25), obtenues en gardant les fréquences négatives de S et Δ :

$$S_{\text{ret}}(x', x) = -\theta(t' - t)S^-(x', x), \quad \Delta_{\text{ret}}(x', x) = -\theta(t' - t)\Delta^-(x', x)$$

$$\text{et } S_{\text{adv}}(x', x) = \theta(t - t')S^-(x', x), \quad \Delta_{\text{adv}}(x', x) = \theta(t - t')\Delta^-(x', x).$$

Les propagateurs S_+ et S_{ret} vérifient l'équation de départ (24).

Les propagateurs apparaissent également dans la théorie quantique : supposons que l'équation classique de la théorie considérée se mette sous la forme $D\phi = 0$. Alors la fonction d'onde à une particule Θ d'un état quelconque (donnée par (22) avec $n = 1$) est un champ classique qui vérifie la même équation. On peut lui appliquer ce qui précède et écrire, quand l'équation (24) est valable (théorie de Dirac typiquement) :

$$\theta(t' - t)\Theta(x') = \int G(x', x)\Theta(x)d^3 \vec{x}.$$

Le propagateur $G(x', x)$ s'interprète alors comme l'amplitude de probabilité de propagation d'une particule seule de x à x' . On peut retrouver ce fait par le calcul direct dans le cadre de la théorie de Dirac, mais aussi de Klein-Gordon : en utilisant les expressions des opérateurs de champ en fonction des opérateurs de création a_k , on obtient $\langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x')\phi^-(x) | 0 \rangle = \Delta_+(x', x)$ et $\langle 0 | \psi_\alpha(x')\bar{\psi}_\beta(x) | 0 \rangle = S_{+, \alpha\beta}(x', x)$ (cf [4]). De la même manière on aboutit à des expressions quantiques des autres fonctions introduites plus haut, par exemple pour le champ de Dirac :

$$\langle 0 | [\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)] | 0 \rangle = iS_{\alpha\beta}(x', x),$$

$$\langle 0 | [\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)] | 0 \rangle \theta(t' - t) = -iS_{\text{ret}, \alpha\beta}(x' - x),$$

$$\langle 0 | T(\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)) | 0 \rangle = iS_{F, \alpha\beta}(x' - x),$$

où l'on convient de noter $T(a(x'), b(x)) = \theta(t' - t)a(x')b(x) - \theta(t - t')b(x)a(x')$ (ordre temporel). La dernière expression fournit en particulier une interprétation du propagateur de Feynman : c'est l'amplitude de probabilité pour la propagation d'une particule de x à x' quand $t' > t$, et pour la propagation de son antiparticule de x' à x quand $t > t'$, ou, du point de vue de la théorie des trous (pour plus de détails à ce sujet, voir [3]), pour la propagation d'une particule de charge donnée de x à x' , quels que soient t et t' .

2) Théories avec interaction

L'introduction de termes d'«interaction» (non linéaires) en théorie des champs est plus délicate que, par exemple, dans une théorie corpusculaire classique. L'objectif des théories avec interaction est en effet la description de l'effet de collisions, création/destruction de particules, par exemple, sur l'évolution des objets mis en évidence dans la théorie libre : particules, champs ... Tout le problème consiste alors à reconnaître ces objets dans le formalisme de la théorie avec interaction (principe de «non-séparabilité») : si dans une théorie élémentaire on peut limiter temporellement l'interaction et étudier les transformations subies par les grandeurs caractéristiques des objets libres au cours de cette période, dans une théorie relativiste des champs ce n'est plus rigoureusement possible puisqu'il faudrait, pour des raisons de covariance, que l'interaction soit également spatialement localisée (on verra cependant qu'une étude temporellement asymptotique est possible). Un autre moyen de résoudre ces problèmes est de procéder par perturbations, c'est-à-dire d'étudier le Hamiltonien $H = H_0 + \alpha H_{\text{int}}$ pour tout α et d'effectuer une interprétation des objets perturbés «par continuité» en α . Mais encore faut-il que les quantités obtenues soient effectivement définies et continues pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{exp}}$, ce qui n'est pas forcément le cas lorsque la valeur expérimentale α_{exp} n'est pas petite.

On préfère donc opter pour une méthode plus générale et plus rigoureuse qui consiste à définir directement dans la théorie avec interaction des objets mathématiques décrivant l'état du système «avant» et «après» l'interaction, au sens des règles d'interprétation de la théorie libre. Plus précisément, on va définir des champs d'opérateurs ϕ_{in} et ϕ_{out} , et on interprétera le produit scalaire $\langle 0 | \phi_{\text{out}}(x_{r_1}) \cdots \phi_{\text{out}}(x_{r_k}) \circ (\phi_{\text{in}}(x_{s_1}) \cdots \phi_{\text{in}}(x_{s_l}))^\dagger | 0 \rangle$ comme amplitude de probabilité de transition de $(\phi(x_{r_1}) \cdots \phi(x_{r_k}))^\dagger | 0 \rangle$ à $(\phi(x_{s_1}) \cdots \phi(x_{s_l}))^\dagger | 0 \rangle$, états de la théorie libre que l'on perturbe. Le propagateur joue un rôle fondamental dans cette construction, on pourrait même imaginer construire différentes interprétations de la théorie avec interaction en partant de propagateurs différents.

Soit donc une théorie quantique des champs obtenue par introduction d'un terme non linéaire dans une théorie «libre» (paramétrée par une «masse» m_0) et donnée par les relations de commutation (10) et de covariance (17), avec des P^μ et $M^{\mu\nu}$ correspondant aux constantes classiques du mouvement. Pour $\mu = 0$ on obtient en particulier une équation de champ du type :

$$D_{m_0}\phi = j(\phi), \quad (28)$$

où D_{m_0} est l'opérateur de la théorie libre que l'on perturbe (par exemple, $\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2$ ou $i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0$ dans les paragraphes suivants). Le champ d'opérateurs $j(x)$ est le terme d'interaction. La perturbation étant susceptible d'influer sur la masse des objets étudiés, on introduit maintenant un champ ϕ_l permettant de décrire les effets de l'interaction sur des objets libres de masse m , a priori différente de m_0 .

Soit $\tilde{j} = j + (D_m - D_{m_0})\phi$ le champ d'interaction corrigé d'un terme de masse, et $G(\cdot, \cdot; m)$ une fonction de Green de la théorie libre de masse m (ie une solution de (25)). L'expression

$$\phi_l(x) = \phi(x) - \int G(x, y; m)\tilde{j}(y)d^4y \quad (29)$$

pour les opérateurs de particules libres de masse m est satisfaisante à plusieurs points de vue :

- Elle est covariante dans la théorie perturbée : en particulier, $[P^\mu, \phi_l] = -i\partial^\mu \phi_l$ donc ϕ_l vérifie la même équation d'évolution (5) que ϕ (mais on ne peut en déduire d'équation de champ de type (28) pour ϕ_l car H est construit sur ϕ et non ϕ_l : $H = \mathcal{H}(\phi) \neq \mathcal{H}(\phi_l)$). Cette propriété découle de la covariance de \tilde{j} , grâce à un changement de variable dans la partie intégrale de (29).
- Elle vérifie l'équation de champ libre de masse m , $D_m\phi_l = 0$ (on utilise ici le fait que G vérifie (25)).

- Elle vérifie les relations de commutation (10) à temps égal (π_l s'exprime en fonction de ϕ_l).

Pour un bon choix de G , et en faisant abstraction des problèmes de renormalisation (voir à ce sujet [4]), on a en outre $\phi(x) \rightarrow \phi_l(x)$ quand $t \rightarrow -\infty$, dans un sens faible (plus précisément : $\langle \alpha | \phi^f(t) | \beta \rangle \rightarrow \langle \alpha | \phi_l^f | \beta \rangle$, avec $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ des états normalisables et ϕ^f le champ intégré contre une solution normalisable f de l'équation classique libre). On note ϕ_{in} le champ libre (dit d'entrée) vérifiant cette propriété, dans le cas des théories de Dirac et Klein-Gordon il est obtenu pour $G = S_{\text{ret}}$ et $G = \Delta_{\text{ret}}$ respectivement. Un autre choix de G ($G = S_{\text{adv}}$ et $G = \Delta_{\text{adv}}$) donne le champ libre dit de sortie vérifiant le passage à la limite $\phi(x) \rightarrow \phi_{\text{out}}(x)$ quand $t \rightarrow +\infty$ (au même sens que précédemment). Remarquons que ces passages à la limite précisent dans quelle mesure un raisonnement asymptotique pour interpréter la théorie est possible : on montre en particulier que la convergence est fautive au sens des champs d'opérateurs (cependant, les opérateurs ϕ^f sont les seuls intéressants physiquement : création de paquet d'onde, mesure moyennée sur une région localisée ...). Tous les calculs pour l'étude de la théorie perturbée portent alors sur ϕ_{in} et ϕ_{out} , par exemple la probabilité de diffusion de x_1 à x_2 pour une particule seule (associée au champ ϕ) est $|\langle 0, \text{in} | \phi_{\text{in}}(x_1) \phi_{\text{out}}(x_2)^\dagger | 0, \text{out} \rangle|^2$ ($|0, \text{in}\rangle$ est l'état propre de champ propre nul du champ d'opérateurs ϕ_{in}). Dans la suite ϕ_l désigne un champ libre quelconque dans la théorie perturbée, et si m est sa masse, $|0, m\rangle$ est l'état vide associé (on s'intéresse peu en général à l'état vide associé au champ perturbé ϕ).

3) Théories de Dirac et Thirring

On introduit maintenant les théories particulières dans le cadre desquelles a lieu l'équivalence entre bosons et fermions que nous nous proposons d'étudier. Le point particulièrement important de ce paragraphe et du suivant est l'introduction de l'ordre normal d'un produit d'opérateurs, qui permet le passage des grandeurs physiques classiques aux observables quantiques. On procède essentiellement de deux manières : dans le cas des champs libres (ce qui inclut les champs ϕ_l du paragraphe précédent), on utilise la résolution de l'équation de champ, dans celui des champs perturbés, on part d'un développement de Fourier à $t = 0$.

La théorie de Dirac est construite par quantification de l'équation de champ classique (spinorielle : $\psi(x)$ a 4 composantes) suivante :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_0)\psi = 0 \quad (30)$$

($M_0 \in \mathbb{R}$ est la masse de la théorie), qui dérive de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_0)\psi.$$

Le moment conjugué de ψ est alors $\pi = i\psi^\dagger$. Une légère nuance doit être introduite par rapport à la construction de A)2) : l'équation (30) conduit à des énergies positives et négatives, d'où l'absence d'état fondamental et des transitions vers des états d'énergie infiniment négative ... Pour éviter cela, on interprétera l'état du vide $|0\rangle$ (champ nul) comme l'état du système où tous les états particuliers d'énergie négative sont occupés («mer de Dirac»), et on construit une théorie fermionique ie avec principe d'exclusion. Cela fait de $|0\rangle$ un état fondamental, relativement auquel sont utilisées les règles d'interprétation classiques (par exemple, $|0\rangle$ est un état sans particule au sens des observables N^+ et N^- introduites plus bas).

On impose concrètement les relations d'anticommutation :

$$\begin{aligned} \{\psi_i(\vec{x}, t), \psi_j(\vec{x}', t)\} &= \{\psi_i^\dagger(\vec{x}, t), \psi_j^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 \quad \text{et} \\ \{\psi_i(\vec{x}, t), \psi_j^\dagger(\vec{x}', t)\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (31)$$

et les équations d'évolution (11) de A)2) avec la densité hamiltonienne :

$$\mathcal{H} = : \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + M_0)\psi :$$

où $:$ désigne une convention d'ordre détaillée plus bas. Cette expression du hamiltonien et les relations (31) permettent d'explicitement l'équation d'évolution (11) en l'équation de champ (30) pour les opérateurs, qui assure alors que les opérateurs de champ peuvent s'écrire, en posant

$$p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M_0^2} :$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \psi_+(\vec{x}, t) + \psi_-(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\vec{p}}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{\sqrt{p_0}} \left(b(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s) e^{-ip^\mu x_\mu} + d^\dagger(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s) e^{ip^\mu x_\mu} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

où $b(p, s)$, $d^\dagger(p, s)$ sont deux familles d'opérateurs, et $u(p, s)$ et $v(p, s)$, des champs spinoriels classiques (cf. par exemple [3] pour leur expression). Cela permet de définir a posteriori la prescription d'ordre, qui consiste à écrire les produits d'opérateurs ψ en les développant à l'aide de ψ_+ et ψ_- et en plaçant les ψ_- à gauche des ψ_+ . On a ainsi par exemple :

$$: \psi(x) \psi(x) := \psi_+^2(x) + 2\psi_-(x)\psi_+(x) + \psi_-^2(x). \quad (33)$$

Avec cette convention, le raisonnement conduisant à (32) reste valable et la prescription d'ordre est donc bien définie.

On vérifie d'autre part à l'aide des relations de commutations (31) celles des opérateurs p et d , par exemple :

$$\begin{aligned} \{b(\vec{p}, s), b(\vec{p}', s')\} &= \{b^\dagger(\vec{p}, s), b^\dagger(\vec{p}', s')\} = 0 \quad \text{et} \\ \{b(\vec{p}, s), b^\dagger(\vec{p}', s')\} &= \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned}$$

En outre le hamiltonien et les observables de moment ($H = P^0$) s'expriment en termes des opérateurs b et d :

$$P^\mu = \sum_{s=\pm 1} \int p^\mu (N^+(\vec{p}, s) + N^-(\vec{p}, s)) d^3\vec{p},$$

avec $N^+(\vec{p}, s) = b^\dagger(\vec{p}, s)b(\vec{p}, s)$ et $N^-(\vec{p}, s) = d^\dagger(\vec{p}, s)d(\vec{p}, s)$ (observables de nombre de particules d'énergie positive au-dessus du vide, et de nombre de trous dans le vide). Il apparaît ainsi que les opérateurs b et d sont les opérateurs de création qu'on aurait obtenus par seconde quantification avec deux types de particules : la théorie de Dirac fait apparaître une équivalence onde-corpuscule, conformément à ce qu'on avait annoncé en A)3)b). Remarquons pour finir que l'énergie du vide $|0\rangle$ (qu'on interprète comme énergie relative à la mer de Dirac) est nulle, c'est le résultat de la prescription d'ordre décrite plus haut (on aboutit sinon à un état vide d'énergie infinie).

Nous introduisons maintenant la théorie fermionique avec interaction, dite de Thirring sans masse, que nous utiliserons dans le cas d'un espace à une dimension ($\vec{x} \equiv x \in \mathbb{R}$, on omettra parfois de noter la dimension temporelle pour alléger les expressions). Elle est construite à partir de celle de Dirac, avec des relations d'anticommutation analogues à (10) et la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d^0 + \mathcal{L}_d^{\text{int}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M_0)\psi - \frac{1}{2}g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi,$$

qui est covariante grâce au caractère scalaire des expressions utilisées (cf. (7) et les remarques suivantes). Pour définir les opérateurs quantiques il faut de plus se donner une prescription d'ordre, pour cela on procède par analogie avec la théorie de Dirac. Les développements (32) n'ont plus de raison d'être valides, cependant on a des expressions de la même forme à temps fixé, par développement de Fourier. On définit ainsi les opérateurs $b(p, s, m)$ et $d(p, s, m)$ pour une masse m arbitraire par :

$$\psi(x, t) = \sum_s \int (b(p, s, m)u(p, s)e^{-ipx} + d^\dagger(p, s, m)v(p, s)e^{ipx}) \frac{1}{\sqrt{\omega(p, m)}} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \quad (34)$$

à $t = 0$ et avec $\omega(p, m) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Dans la suite on prendra $m = 0$. Comme dans le cas libre ce développement s'écrit $\psi = \psi^+ + \psi^-$ et on a de même $\bar{\psi} = \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-$ où $\bar{\psi}^+ = \bar{\psi}^-$ et $\bar{\psi}^- = \bar{\psi}^+$. La prescription d'ordre consiste alors à écrire les produits d'opérateurs de telle manière que les ψ^+ , $\bar{\psi}^+$ soient à droite des ψ^- et $\bar{\psi}^-$ à $t = 0$. Les opérateurs évoluent ensuite à partir de cet ordre, conformément à l'équation de champ avec perturbation, et (34) n'est plus valable pour $t > 0$, pas plus que les identités du type (33).

La théorie «libre» que l'on utilise pour étudier cette théorie avec interaction est simplement la théorie de Thirring sans masse ($M_0 = 0$), pour laquelle on dispose de résultats simples. Soit ψ_l un tel champ libre (en représentation de Heisenberg) dans la théorie de Thirring massive (au sens du

paragraphe 2)), et soit $|0\rangle$ l'état vide associé (on ne note pas la masse du champ libre car elle est fixée par définition à 0). On utilise pour ψ_l l'ordre normal défini par les mêmes équations (valables à tout t) que dans le cas de la théorie libre, comme annoncé plus haut.

Le premier résultat d'équivalence entre fermions et bosons que nous allons étudier repose sur le calcul de moyennes sur le vide de produits de certains opérateurs libres, dans la théorie bosonique et dans la théorie fermionique. Il a été présenté pour la première fois par Coleman dans [11]. Plus précisément, on calcule les produits scalaires entre états de la forme $\sigma_{s_1}(x_1) \cdots \sigma_{s_k}(x_k)|0\rangle$ avec $s_i \in \{+, -\}$ et $\sigma_{\pm} = \bar{\psi}_l(1 \pm \gamma_5)\psi_l$ (lorsque tous les intervalles entre x_i sont du genre espace) :

$$\langle 0 | \prod \sigma_{s_i}(x_i) | 0 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum s_i \neq 0 \\ A^{2n} \prod_{i>j} [(x_i - x_j)^2]^{s_i s_j \delta} & \text{sinon, avec } \delta = (1 + \frac{g}{\pi})^{-1}. \end{cases} \quad (35)$$

A est une constante introduite par un choix de renormalisation.

Ce calcul dépasse le cadre de notre exposé (il faut en particulier résoudre des problèmes de divergence, particuliers à la théorie de Thirring sans masse, et définir des renormalisations), cependant il est plus simple dans le cas de la théorie de Dirac, c'est-à-dire avec $g = 0$ (on peut d'ailleurs déduire le résultat général de ce cas particulier). En effet, si on utilise la notation complexe pour les points de l'espace spatio-temporel bidimensionnel (dans la version euclidienne et non minkowskienne de la théorie), l'opérateur de Dirac (avec une masse nulle) $D = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1$ prend une forme simple (γ^0 et γ^1 étant données par (6)), et, conséquemment, l'équation de Green également :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{+,11} & S_{+,12} \\ S_{+,21} & S_{+,22} \end{pmatrix} (z - z') = \delta(z - z') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La résolution est facile grâce à l'égalité élémentaire $\partial_{\bar{z}}(z^{-1}) = \pi\delta(z - z')$:

$$S_+(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement l'expression d'une contraction, d'après les résultats sur les propagateurs du paragraphe 1) :

$$\langle 0 | \psi_{l1}(z_1) \bar{\psi}_{l2}(z_2) | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi(z_1 - z_2)} \quad \text{et} \quad \langle 0 | \psi_{l2}(z_1) \bar{\psi}_{l1}(z_2) | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}.$$

Le théorème de Wick (énoncé en 5) dans sa version «bosonique» (41) donne alors le résultat annoncé. Par exemple, l'expression $\sigma_+(z_1)\sigma_-(z_2) = -4\psi_{l1}(z_1)\psi_{l2}(z_2)\bar{\psi}_{l2}(z_2)\bar{\psi}_{l1}(z_1)$ permet d'obtenir

$$\langle 0 | \sigma_+(z_1)\sigma_-(z_2) | 0 \rangle = \frac{-1}{\pi^2} \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

ce qui est le résultat voulu : $-(z_1 - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = |z_1 - z_2|^2 = \|x_1 - x_2\|^2$.

4) Théories de Klein-Gordon et Sine-Gordon

La théorie de Klein-Gordon est construite par quantification (bosonique) de l'équation (scalaire) classique :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + M_1^2)\phi(x) = 0, \quad (36)$$

qui dérive de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M_1^2 \phi^2).$$

Le moment conjugué de ϕ est alors $\pi = \dot{\phi}$. On impose ainsi les relations de commutation (10) et les équations d'évolution (11), avec une densité hamiltonienne quantique définie par

$$\mathcal{H} = : \frac{1}{2} (\pi^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi + M_1^2 \phi^2) :,$$

la prescription d'ordre sera définie ci-dessous. L'équation d'évolution se réécrit, comme en 3), sous la forme de l'équation de champ (36) pour les opérateurs, ce qui permet de développer le champ :

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \phi^+(\vec{x}, t) + \phi^-(\vec{x}, t) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(\sqrt{2\pi})^3 p_0} \left(a(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu} \right),\end{aligned}\quad (37)$$

avec l'égalité $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M_1^2}$, et $a(\vec{p})$ une famille d'opérateurs. Cela permet de définir la prescription d'ordre utilisée, comme pour la théorie de Dirac, en écrivant les $\phi^-(x)$ à gauche des $\phi^+(x)$ dans les produits d'opérateurs ϕ . D'autre part on obtient en inversant (37) les relations de commutation des $a(\vec{p})$, qui se trouvent être celles, (21), de la seconde quantification. On vérifie enfin l'expression du hamiltonien et de l'observable de moment, en posant $N(\vec{p}) = a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$:

$$P_\mu = \frac{1}{2} \int p^\mu N(\vec{p}) d^3\vec{p}$$

avec $N(\vec{p}) = a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$ (observable de nombre de particules). La théorie de Klein-Gordon fait donc apparaître une dualité onde-particule, comme celle de Dirac, ϕ^- et ϕ^+ sont des opérateurs de création et annihilation de particule.

Nous nous plaçons désormais dans un espace à une dimension (comme pour la théorie de Thirring). La théorie bosonique que nous étudierons, dite de Sine-Gordon et issue de la théorie de Klein-Gordon, est définie par les relations de commutation (10) et la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d^0 + \mathcal{L}_d^{\text{int}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M_1^2 \phi^2) + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos(\beta \phi),$$

qui est clairement covariante (ϕ est scalaire). Il nous faut de plus une prescription d'ordre que nous introduisons comme précédemment, à temps fixé. Pour une masse m choisie arbitrairement on définit ainsi les opérateurs $a(p, m)$ par

$$\phi(\vec{x}, t) = \int (a(p, m) e^{-ipx} + a(p, m)^\dagger e^{ipx}) \frac{1}{\omega(p, m)} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}},$$

où $\omega(p, m) = \sqrt{p^2 + m^2}$ et $t = 0$. Ce développement permet de définir ϕ^+ , ϕ^- , π^+ et π^- , et donc un ordre normal pour la théorie perturbée, comme plus haut.

On va utiliser pour l'étude du champ de Sine-Gordon des théories libres (ie de Klein-Gordon) de masses μ diverses. L'état du vide associé sera noté $|0, \mu\rangle$, et l'ordre normal correspondant, N_μ (c'est celui de la théorie de Klein-Gordon de masse μ). ϕ_l désigne spécifiquement le champ libre de masse $\mu = M_1$. L'ordre normal plaçant les opérateurs de destruction à droite, on a pour toute série entière f : $\langle 0, \mu | N_\mu f(\phi_l) | 0, \mu \rangle = 0$.

Soit $A_\pm = N_m e^{\pm i\beta\phi_l}$. Notre but est de calculer les produits scalaires entre des états du type $A_{s_1}(x_1) \cdots A_{s_k}(x_k) |0, M_1\rangle$ ($s_i \in \{+, -\}$), dans le cas de masse nulle. Cependant on ne fera tendre M_1 vers 0 qu'à la fin des calculs pour contourner les problèmes de divergence de la théorie de Klein-Gordon de masse nulle. La masse m qui intervient dans la définition de A_\pm sera en général non nulle, et reliée à la constante de renormalisation A qui apparaît dans (35) : ainsi on utilise pour ϕ_l un ordre normal non naturel (ce qui est en fait une manière de renormaliser la théorie). Nous recherchons donc une expression de la quantité, déjà calculée dans le cadre de la théorie de Thirring, $\langle 0, M_1 | \prod N_m e^{i\beta_i \phi_l(x_i)} | 0, M_1 \rangle$ avec $\beta_i = \pm\beta$.

5) Changement d'ordre normal

Il est naturel de penser que le calcul serait plus facile si l'ordre normal utilisé était N_{M_1} plutôt que N_m , nous allons donc étudier l'influence d'un changement d'ordre normal sur une exponentielle d'opérateurs de champ libre. Pour cela on utilise l'égalité très utile suivante sur les opérateurs de la représentation de Heisenberg :

$$e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int J(x) \Delta_+(x-y, \mu) J(y) d^2x d^2y\right) N_\mu \left(e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x} \right), \quad (38)$$

que nous réutiliserons dans la suite de notre étude et que nous allons maintenant établir. J est un champ spatio-temporel classique quelconque (que l'on particularisera par la suite).

La preuve de (38) repose la généralisation suivante du théorème de Wick qui fournit l'expression d'un produit d'opérateurs de champ (libre) en fonction de produits en ordre normal. Les coefficients du membre de droite sont des espérances sur le vide, appelées contractions, de produits deux-à-deux des mêmes opérateurs, et la somme ne porte bien sûr que sur les entiers k pairs :

$$\begin{aligned} \phi_l(x_1) \cdots \phi_l(x_n) &= \sum_{k=2}^n \sum_{\text{perm}} \langle 0, \mu | \phi_l(x_1) \phi_l(x_2) | 0, \mu \rangle \cdots \\ &\quad \cdots \langle 0, \mu | \phi_l(x_{k-1}) \phi_l(x_k) | 0, \mu \rangle N_\mu(\phi_l(x_{k+1}) \cdots \phi_l(x_n)). \end{aligned} \quad (39)$$

Par somme sur les permutations on entend somme sur les choix possibles pour les $n - k$ derniers x_i (intervenant dans le produit ordonné) et sur les couples possibles parmi les x_i restants pour les contractions. Ceci fait

$$\mathcal{N}_n^k = C_n^{n-k} C_k^2 C_{k-2}^2 \cdots C_2^2 = \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-k}{2}} \quad (40)$$

termes (pour k fixé). En calculant l'espérance sur $|0, \mu\rangle$ de (39), les termes du membre de droite pour lesquels l'opérateur ordonné est non trivial ($k < n$) s'annulent comme on l'a remarqué plus haut, et il reste l'énoncé classique du théorème de Wick :

$$\begin{aligned} \langle 0, \mu | \phi_l(x_1) \cdots \phi_l(x_n) | 0, \mu \rangle &= \sum_{\text{perm}} \langle 0, \mu | \phi_l(x_1) \phi_l(x_2) | 0, \mu \rangle \cdots \\ &\quad \cdots \langle 0, \mu | \phi_l(x_{k-1}) \phi_l(x_k) | 0, \mu \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Le terme «de degré n » dans le membre de gauche de (38),

$$E_n = \frac{i^n}{n!} \int J(x_1) \phi_l(x_1) \cdots J(x_n) \phi_l(x_n) d^2x_1 \cdots d^2x_n,$$

s'exprime alors comme somme de termes avec des produits ordonnés de $n - k$ opérateurs ($1 \leq k \leq n$, k pair) grâce au théorème de Wick (39), les termes permutés étant tous les mêmes du fait de l'intégration sur les n variables :

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=2}^n \mathcal{N}_n^k \int J(x_{k+1}) \cdots J(x_n) N_\mu(\phi_l(x_{k+1}) \cdots \phi_l(x_n)) d^2x_{k+1} \cdots d^2x_n \cdots \\ &\quad \cdots \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^k \int J(x_i) J(x_{i+1}) \langle 0, \mu | \phi_l(x_i) \phi_l(x_{i+1}) | 0, \mu \rangle d^2x_i d^2x_{i+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

On regroupe alors dans $\sum E_n$ les termes ayant des produits ordonnés «de degré N », ils proviennent des termes de (42) pour lesquels $n - N = k$. Grâce à l'expression $\langle 0, \mu | \phi_l(x_1) \phi_l(x_2) | 0, \mu \rangle = \Delta_+(x_1 - x_2, \mu)$ des contractions (cf. 1)), on obtient en facteur de $\int J(x_1) \cdots J(x_N) N_\mu(\phi_l(x_1) \cdots \phi_l(x_N)) d^2x_1 \cdots d^2x_N$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned} E'_N &= \sum_{\substack{n=N \\ n-N \text{ pair}}}^{+\infty} \mathcal{N}_n^{n-N} \frac{i^n}{n!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{n-N} \int J(x_i) J(x_{i+1}) \Delta_+(x_i - x_{i+1}, \mu) d^2x_i d^2x_{i+1} \\ &= \frac{i^N}{N!} \sum_{\substack{n=N \\ n-N \text{ pair}}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-N}{2}} i^{N-n} \left(\int J(x) \Delta_+(x - y, \mu) J(y) d^2x d^2y \right)^{\frac{N-n}{2}} \\ &= \frac{i^N}{N!} \exp\left(-\frac{1}{2} \int J(x) \Delta_+(x - y, \mu) J(y) d^2x d^2y\right) \end{aligned}$$

(en effet on multiplie dans la première ligne $\frac{n-N}{2}$ intégrales toutes égales). En sommant sur N on obtient bien l'expression annoncée :

$$\begin{aligned} e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} E_n = \sum_{N=0}^{+\infty} E'_N \int J(x_1) \cdots J(x_N) N_\mu(\phi_l(x_1) \cdots \phi_l(x_N)) d^{2N}x \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int J(x) \Delta_+(x-y, \mu) J(y) d^2x d^2y\right) N_\mu\left(e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x}\right). \end{aligned}$$

6) Bosonisation

On obtient la formule donnant le changement d'ordre normal en appliquant deux fois (38) avec les deux masses m et M_1 :

$$\begin{aligned} N_m\left(e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x}\right) &= \\ \exp\left(-\frac{1}{2} \int J(x) (\Delta_+(x-y, M_1) - \Delta_+(x-y, m)) J(y) d^2x d^2y\right) &\times \\ \times N_{M_1}\left(e^{i \int J(x) \phi_l(x) d^2x}\right) &\quad (43) \end{aligned}$$

(en fait (38) n'est pas définie du fait de la divergence du propagateur en 0, par contre (43) l'est). L'expression du propagateur (au premier ordre en $\mu|x|$) s'obtient grâce à l'expression (27) dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} \Delta_+(x, \mu) &= \int \frac{e^{-ip_\mu x^\mu}}{p^2 - \mu} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln(c\mu^2|x^2|) + O(\mu^2 x^2), \end{aligned} \quad (44)$$

elle fournit en particulier l'identité $\Delta_+(0, M_1) - \Delta_+(0, m) = \frac{1}{4\pi} \ln(m^2/M_1^2)$. L'application de (43) avec $J(x) = \pm\beta\delta(x-y)$ fournit alors le résultat du changement d'ordre normal pour les opérateurs A_\pm :

$$\begin{aligned} N_m\left(e^{\pm i\beta\phi_l(y)}\right) &= \left(\frac{M_1}{m}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} N_\mu\left(e^{\pm i\beta\phi_l(y)}\right), \quad \text{d'où :} \\ \langle 0, M_1 | \prod N_m e^{i\beta_i \phi_l(x_i)} | 0, M_1 \rangle &= \left(\frac{M_1}{m}\right)^{\frac{1}{4\pi} \sum \beta_i^2} \langle 0, M_1 | \prod N_{M_1} e^{i\beta_i \phi_l(x_i)} | 0, M_1 \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

(on trouvera des résultats plus complets de changement d'ordre normal dans [12]). Le membre de droite, comme le membre de gauche, peuvent se calculer par le théorème de Wick (41), en développant puis factorisant des exponentielles comme au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \langle 0, M_1 | \prod N_m e^{i\beta_i \phi_l(x_i)} | 0, M_1 \rangle &= \sum_{k_1, \dots, k_n} \langle 0, M_1 | \prod_i \frac{(i\beta_i)^{n_i}}{n_i!} N_m \phi_l(x_i)^{n_i} | 0, M_1 \rangle \\ &= \dots = \prod_{i>j} \sum_k \frac{1}{k!} \langle 0, M_1 | (-\beta_i \beta_j) \phi_l(x_i) \phi_l(x_j) | 0, M_1 \rangle^k \times \\ &\quad \times \prod_i \sum_k \frac{1}{k!} \langle 0, M_1 | -\beta_i^2 N_m \phi_l(x_i)^2 | 0, M_1 \rangle^k. \end{aligned} \quad (46)$$

Le dernier facteur de (46) n'est pas calculable simplement, sauf si l'on a pris le soin de remplacer N_m par N_{M_1} comme on l'a fait en (45). Dans ce dernier cas, l'espérance sur $|0, M_1\rangle$ d'un produit non trivial ordonné par N_{M_1} est nulle, donc le deuxième facteur de (46) vaut 1. Finalement (45) et (46) donnent l'expression recherchée :

$$\begin{aligned} \langle 0, M_1 | \prod N_m e^{i\beta_i \phi_l(x_i)} | 0, M_1 \rangle &= \left(\frac{M_1^2}{m^2}\right)^{\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} e^{-\beta_i \beta_j \langle 0, M_1 | \phi_l(x_i) \phi_l(x_j) | 0, M_1 \rangle} \\ &= \left(\frac{M_1^2}{m^2}\right)^{\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} [cM_1^2(x_i - x_j)^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}, \end{aligned} \quad (47)$$

d'après l'expression (44) du propagateur et pour des intervalles de genre espace entre les x_i .

La puissance de M_1 dans (47) est en particulier $\frac{1}{4\pi}(\sum \beta_i)^2$, lorsqu'on passe à la limite $M_1 = 0$ l'expression obtenue s'annule donc, sauf si $\sum \beta_i = 0$. Dans ce cas l'espérance sur le vide recherchée vaut :

$$\prod_{i>j} [cm^2(x_i - x_j)^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}. \quad (48)$$

Ces produits scalaires sont égaux à ceux de la théorie de Thirring (comparer (35) et (48)), si on fait se correspondre les $\sigma_{s_1}(x_1) \cdots \sigma_{s_n}(x_n) |0\rangle$ et $A_{s_1}(x_1) \cdots A_{s_n}(x_n) |0\rangle$, et à condition d'avoir la relation entre les paramètres des deux théories :

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + \frac{g}{\pi}} \quad (49)$$

(les constantes multiplicatives A et m sont introduites par les choix de renormalisation et peuvent donc être choisies arbitrairement). En particulier lorsque $\beta^2 = 4\pi$ on fait se correspondre la théorie de Sine-Gordon (perturbée) et celle de Dirac (libre). Ce résultat fut établi pour la première fois par Sidney Coleman dans [11].

Comment interpréter cette égalité entre fonctions de Green (à n points) ? Elle montre en fait que les sous-espaces engendrés par l'action des $A_{\pm}(x)$ et $\sigma_{\pm}(x)$ sur $|0\rangle$ sont identifiables (y compris leurs structures préhilbertiennes), ainsi que les champs d'opérateurs de création/destruction sur ces sous-espaces, A_{\pm} et σ_{\pm} . Autrement dit, les systèmes des théories de Sine-Gordon et Thirring dont les vecteurs d'état sont dans ces sous-espaces sont décrits par le même objet mathématique : on a donc une équivalence partielle entre systèmes bosoniques et fermioniques.

La question qui se pose alors est de savoir quels sont les systèmes physiques que l'on met ainsi en correspondance. Les systèmes bosoniques en cause sont complexes (exponentielle, prescription d'ordre non naturelle), mais ils s'identifient à des systèmes fermioniques simples : les états créés par les $\sigma_{\pm} = \bar{\psi}_l(1 \pm \gamma_5)\psi_l$ sont assez facilement identifiables puisque ψ_l et $\bar{\psi}_l$ sont les opérateurs libres de création/annihilation introduits précisément dans la théorie avec interaction pour une interprétation particulière : il s'agit essentiellement de systèmes contenant un nombre pair de fermions (couples particule/antiparticule). En particulier $A_{\pm}(x)|0\rangle$ (état bosonique complexe) est un système fermionique simple, créé par $\bar{\psi}_l(1 \pm \gamma_5)\psi_l$, vérifiant $N_+ = N_-$. On peut alors légitimement espérer étendre l'identification à des systèmes «deux fois plus petits» ie mettre en évidence dans la théorie bosonique des états interprétables comme particules fermioniques élémentaires (la démarche inverse est triviale : on sait bien en mécanique quantique classique qu'on obtient un boson à partir d'un système fermionique en formant un état lié de deux fermions). Pour cela on utilise une autre tactique menant au même résultat d'équivalence, centrée sur les opérateurs, plutôt que sur les états, de chaque théorie (comme on l'a fait pour obtenir les dualités onde-corpuscule).

7) Opérateurs fermioniques

Nous nous plaçons toujours dans la théorie bosonique de Sine-Gordon munie d'un champ d'opérateurs libres ϕ_l et nous souhaitons définir un champ ψ d'opérateurs fermioniques analogues à ceux de la théorie de Thirring, c'est-à-dire en particulier avec des relations d'anticommutation analogues à (10). On n'utilise que l'ordre normal N_m , noté $:$ dans la suite. L'idée pour obtenir deux opérateurs anticommutant à partir d'opérateurs vérifiant des relations de commutation est d'utiliser la formule

$$:e^A::e^B := e^{[A,B]} :e^B::e^A: \quad (\text{si } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0).$$

Remarquons au passage qu'une formule du même genre, $e^A e^B = e^{[A,B]/2} e^{A+B}$, permet d'établir (38). On utilisera aussi dans la suite l'égalité $[A, e^B] = [A, B]e^B$, et on retrouvera ces identités dans la partie mathématique. Les démonstrations de ces formules sont tout à fait élémentaires (pour le passage aux opérateurs ordonnés on peut remarquer d'après (38) que l'ordre normal ne modifie une exponentielle que d'une constante multiplicative).

On pense alors à utiliser cette formule avec deux opérateurs A et B vérifiant $[A, B] = i\pi$, car alors $:e^A::e^B$: anticommutent, et pour cela, à exploiter la relation $[\phi_l(x, t), \phi_l(y, t)] = i\delta(x - y)$, intégrée par rapport à y , pour obtenir un commutateur constant non nul entre des opérateurs de champ. L'expression obtenue apparaît dans le commutateur $[A(x, t), A(y, t)]$ si on pose $A(x, t) =$

$\phi_l(x, t) + \int \dot{\phi}_l(\xi, t)d\xi$, mais également son opposée. Pour briser cette symétrie on intègre jusqu'à x seulement :

$$A(x, t) = C\phi_l(x, t) + D \int_{-\infty}^x \dot{\phi}_l(\xi, t)d\xi.$$

Alors la relation de commutation est satisfaisante :

$$\begin{aligned} [A(x, t), A(y, t)] &= CD \int_{-\infty}^y [\phi_l(x, t), \dot{\phi}_l(\xi, t)]d\xi + CD \int_{-\infty}^x [\dot{\phi}_l(\xi, t), \phi_l(y, t)]d\xi \\ &= i CD(\theta(y-x) - \theta(x-y)) = \pm i CD. \end{aligned}$$

Le commutateur n'est pas tout à fait constant mais cela suffit, si $CD = \pm\pi$ alors : $e^{A(x,t)}$: et $:e^{A(y,t)}$: anticommulent pour tous x et y . On définit finalement le champ ψ par :

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= \sqrt{\frac{cm}{2\pi}} : e^{-2i\pi\beta^{-1} \int_{-\infty}^x \dot{\phi}_l(\xi, t)d\xi - \frac{1}{2}i\beta\phi_l(x, t)} : \\ \psi_2(x, t) &= -i\sqrt{\frac{cm}{2\pi}} : e^{-2i\pi\beta^{-1} \int_{-\infty}^x \dot{\phi}_l(\xi, t)d\xi + \frac{1}{2}i\beta\phi_l(x, t)} : , \end{aligned} \quad (50)$$

qui anticommulent avec eux-mêmes et entre eux (ces expressions posent des problèmes de convergence qu'on ne cherche pas à traiter ici). Ces champs ont été introduits par S. Mandelstam dans [28].

Il reste à vérifier la relation d'anticommutation $\{\psi_i(x), \psi_j^\dagger(y)\} = \delta(x-y)\delta_{ij}$ (cf. (31) avec une dimension spatiale et sans noter la dimension temporelle). Mais on se trouve à ce stade confronté aux problèmes de divergence de la théorie (les mêmes que pour la théorie de Thirring sans masse). Par exemple, le produit $\bar{\psi}(x, t)\psi(y, t)$ devient singulier lorsque y tend vers x . Dans la théorie scalaire (de Klein-Gordon), c'est pour résoudre ce genre de problèmes qu'on introduit des prescriptions d'ordre non naturelles. Nous allons donner ici un aperçu des méthodes utilisées dans la théorie de Thirring, sans détailler les calculs (anticommutateurs, produits d'exponentielles ordonnées) qui sont analogues à ceux déjà effectués. L'idée est de redéfinir les opérateurs où des produits $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ apparaissent en remplaçant ces derniers par des expressions du type $\lim_{y \rightarrow x} |y-x|^\sigma \bar{\psi}(x)\psi(y)$. On obtient une valeur finie et non nulle pour la valeur suivante de la constante σ :

$$\sigma = \frac{g}{2\pi} \frac{2\pi + g}{\pi + g}. \quad (51)$$

Cela s'applique au problème qui nous concerne puisque les relations d'anticommutation font apparaître de tels produits d'opérateurs susceptibles de diverger. Considérons plutôt les relations de commutation avec le courant :

$$[j^\mu(x, t), \psi(y, t)] = -(g^{\mu 0} + \epsilon^{\mu 0} \gamma^5) \psi(x, t) \delta(x-y) \quad \text{où} \quad j^\mu(x, t) = \bar{\psi}(x, t) \gamma^\mu \psi(x, t) \quad (52)$$

(deux relations d'anticommutation donnent effectivement une relation de commutation). Alors les problèmes de divergence sont cantonnés à la définition de j^μ , que l'on redéfinit en suivant les prescriptions énoncées plus haut :

$$\begin{aligned} j^0(x, t) &= \lim_{y \rightarrow x} |cm(x-y)|^\sigma \bar{\psi}(x, t) \gamma^0 \psi(y, t) \\ \text{et} \quad j^1(x, t) &= (4\pi)^{-1} \beta^2 \lim_{y \rightarrow x} |cm(x-y)|^\sigma \bar{\psi}(x, t) \gamma^1 \psi(y, t). \end{aligned} \quad (53)$$

Il s'agit maintenant d'expliciter ces opérateurs à l'aide de la définition (50). On «factorise» d'abord les ordres normaux par (38) avec $J_x(\xi) = -\frac{1}{2}i\beta\delta(\xi-x) - 2i\pi\beta^{-1} \int_{-\infty}^x \partial_0 \delta(\xi-\zeta)d\zeta$ (où $\zeta^0 = x^0$). Après utilisation de l'expression (44) du propagateur Δ_+ et de la formule $e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A, B]} e^{A+B}$, il vient :

$$\begin{aligned} \psi_i^\dagger(x) \psi_i(y) &= \mp i (2\pi(x-y)) |cm(x-y)|^{-\beta^2/8\pi - 2\pi\beta^{-2} + 1} \times \\ &\quad \times : e^{-2\pi i \beta^{-1} \int_x^y \dot{\phi}(\xi) d\xi \mp \frac{1}{2} i \beta (\phi_l(y) - \phi_l(x))} : . \end{aligned} \quad (54)$$

On lit sur (54) la valeur de σ qui va faire converger les redéfinitions (53) lorsque y tend vers x . Il faut imposer la relation :

$$\sigma = \frac{\beta^2}{8\pi} - 2 + 2\pi\beta^{-2} = \frac{\beta^2}{8\pi} (1 - 4\pi\beta^{-2})^2.$$

En comparant avec (51), on voit que cela revient à lier β à g par la formule :

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + \frac{g}{\pi}}. \quad (55)$$

On développe ensuite l'exponentielle de (54), dont l'argument vaut au premier ordre en $(x - y)$: $-2\pi i\beta^{-1}(x - y)\partial_0\phi_l(x) \mp \frac{1}{2}i\beta(x - y)\partial_1\phi_l(x) + O((x - y)^2)$ (l'ordre normal devient alors inutile). On obtient les expressions de $\psi_0^\dagger(x)\psi_0(x)$ et $\psi_1^\dagger(x)\psi_1(x)$, puis, en insérant dans (53) les valeurs (6) des matrices γ^μ :

$$\begin{aligned} j^0(x, t) &= (2\pi)^{-1}\beta\partial_1\phi_l(x, t) \\ \text{et } j^1(x, t) &= -(2\pi)^{-1}\beta\partial_0\phi_l(x, t). \end{aligned} \quad (56)$$

Avec ces résultats, la vérification des relations de commutations (52) découle immédiatement de l'identité $[A, e^B] = [A, B]e^B$ et des relations de commutations de ϕ_l et $\dot{\phi}_l$.

8) Solitons

On a construit en 7) des opérateurs de champ vérifiant à l'intérieur de la théorie de Sine-Gordon les relations d'anticommuation de la théorie de Thirring, à condition que les paramètres β et g de ces théories soient reliées par la formule (55), qui est la même que celle, (49), qu'on avait obtenue par la méthode de Coleman. En fait l'identification va plus loin : on peut montrer, par des calculs analogues bien que plus techniques, que le champ ψ construit ci-dessus vérifie l'équation de champ de la théorie de Thirring avec $M_0 = m\pi/c\beta^2$ et $m^2 = \alpha_0$ — modifiée, comme les relations d'anticommuation, pour traiter les problèmes de divergence : cf. [28]. Ceci assure que l'on peut identifier à tout temps le sous-espace de la théorie de Sine-Gordon engendré par action de ψ sur un vecteur $|\theta\rangle$ arbitraire avec le même sous-espace de la théorie de Thirring, leurs structures préhilbertiennes, et les opérateurs fermioniques de champ sur ces sous-espaces. On retrouve ainsi le résultat de 6), à ceci près que l'identification porte ici sur tout le secteur particulaire de la théorie fermionique. En particulier on dispose cette fois d'états bosoniques, $\psi_i(x)|\theta\rangle$, qui peuvent s'interpréter comme fermions élémentaires. Nous étudions maintenant ces états.

En théorie classique des champs, l'évolution est souvent dissipative : toute condition initiale d'énergie finie conduit à $t = +\infty$ à un champ nul (phénomène d'«étalement»). Cependant dans certaines théories il existe des solutions d'énergie finie qui ne se dissipent pas, c'est-à-dire pour lesquelles le maximum spatial du champ est minoré par une valeur strictement positive, pour tout t . Ces solutions sont appelées solitons classiques (on pourra se référer, pour une étude plus approfondie, à [12]). Il existe en particulier de telles solutions, se propageant de plus sans déformation et à vitesse constante, dans des théorie de type Sine-Gordon à une dimension d'espace, avec une densité lagrangienne $\mathcal{L}_d = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi)$ où U atteint son minimum (nul) en plusieurs points. Ces solutions sont caractérisées par le fait qu'elles ont des valeurs limites différentes en $+\infty$ et $-\infty$, réalisant le minimum de U (c'est nécessaire si on veut une énergie finie pour le champ) : la continuité de l'évolution du champ assure en effet que ces valeurs limites ne peuvent sauter d'un minimum de U à un autre, car il faudrait pour cela passer par des champs d'énergie infinie (la conservation de ces valeurs limites, qui ne découle pas de l'étude de l'équation de champ mais des propriétés de connexité de l'espace des configurations, est dite topologique).

Lorsqu'on effectue le passage aux théories quantiques, ces objets classiques ont des analogues parmi les états stationnaires, tout comme l'état classique «particule localisée dans un puits de potentiel» se transpose quantiquement en un état propre du Hamiltonien de fonction d'onde localisée autour de la position classique. On pense alors à caractériser les solitons quantiques par le fait que les valeurs moyennes du champ sont différentes en $-\infty$ et $+\infty$. Or on peut vérifier pour les opérateurs construits en 7) que la valeur moyenne du champ sur l'état $\psi(x)|0\rangle$ effectue précisément un saut de $2\pi\beta^{-1}$ entre $-\infty$ et $+\infty$: ceci incite à l'interpréter comme état solitonique du champ quantique.

Plus généralement, nous allons construire un opérateur $\psi_0(x)$ ajoutant un champ fixé f_x au champ moyen de tous les états, et même, envoyant les shaped states $|\Phi_l\rangle$ sur les shaped states $|\Phi_l + f_x\rangle$. Cela s'écrit encore $\forall x, y \quad \phi_l(y)\psi_0(x)|\Phi_l\rangle = (\Phi_l(y) + f_x(y))\psi_0(x)|\Phi_l\rangle = \psi_0(x)\phi_l(y)|\Phi_l\rangle + f_x(y)\psi_0(x)|\Phi_l\rangle$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \quad [\phi_l(y), \psi_0(x)] = f_x(y)\psi_0(x). \quad (57)$$

Pour obtenir une telle relation de commutation on pense une fois de plus à utiliser la formule $[A, e^B] = [A, B]e^B$ (si $[A, B]$ commute avec A et B), et on définit

$$\psi_0(x) = e^{-2\pi i\beta^{-1} \int f_x(\xi)\dot{\phi}_l(\xi)d\xi + C\phi_l(x)}, \quad (58)$$

qui convient (en effet, $[\phi_l(y), C\phi_l(x)] = 0$ et $[\phi_l(y), \int f_x(\xi)\dot{\phi}_l(\xi)d\xi] = \int f_x(\xi)[\phi_l(y), \dot{\phi}_l(\xi)]d\xi = if_x(y)$). Pour résoudre les problèmes de convergence il faut passer à l'opérateur ordonné, ce qui ne modifie pas la relation de commutation (57) : en effet, l'application de (38) avec $J_x(\xi) = -2\pi\beta^{-1} \times \int f_x(y)\partial_0\delta(\xi - y)d^2y - iC\delta(x - \xi)$ (où $y^0 = x^0$) donne

$$\psi_0 = : \psi_0 : e^{-\frac{1}{2} \int J(x)\Delta_+(x-y,m)J(y)d^2x d^2y},$$

qui montre que ψ_0 n'est modifié que d'une constante multiplicative (infinie, sauf si on régularise le propagateur).

Prenons maintenant $f_x(y) = \delta_{y < x}$ et $C = \pm \frac{1}{2}i\beta$ dans (58) : on obtient exactement les opérateurs de Mandelstam (50). Ceux-ci apparaissent donc comme des cas particuliers d'opérateurs de création de soliton (mais ce sont les seuls à vérifier des relations d'anticommutation fermioniques) : $\psi_i(x)|0\rangle$ est un état propre du champ pour un échelon de Heaviside en x . L'état bosonique que nous avons précédemment interprété comme fermion élémentaire est donc, d'une certaine manière, un soliton, c'est-à-dire un état non particulaire (ou encore, mettant en jeu une infinité de bosons), plus proche d'un champ classique.

Une question reste ouverte : a-t-on aussi des équivalences entre fermions et bosons en dimension d'espace supérieure à 1 ? Les analyses menées dans ce paragraphe nous semblent pencher dans le sens d'une réponse négative, ou du moins, indiquer que d'éventuels états fermioniques dans une théorie bosonique en dimension strictement supérieure à 1 seraient d'une nature tout autre que celle des états que nous avons mis en évidence en dimension 1. En effet, la présentation des solitons que nous venons de donner repose entièrement sur l'existence de «deux infinis» distincts dans l'espace ambiant (ou plus précisément, sur la non-connexité du cône ouvert des points situés à un intervalle de genre espace de l'origine) : en dimension supérieure, un champ dans un potentiel régulier quelconque a une valeur limite unique à l'infini (à $t = 0$). D'autre part, l'absence de spin en dimension 1 est une autre indication en faveur d'une réponse négative : l'existence de représentations du groupe de spin dans les théories bosoniques et fermioniques en dimension supérieure pourrait constituer une obstruction à d'éventuelles équivalences entre fermions et bosons.

C) Équivalences entre Fermions et Bosons en Mathématiques

Nous présentons tout d'abord une construction d'opérateurs de vertex sur un espace de Fock, qui permettent d'obtenir des opérateurs de création analogues à ceux de Mandelstam. Puis nous montrons, dans le cas relativement élémentaire d'un groupe de boucle, comment l'équivalence de deux représentations d'une même structure algébrique peut conduire à un isomorphisme explicite entre un espace d'états fermionique et un espace d'états bosonique. Ce sont ces deux idées qui guident les résultats de la théorie de la représentation des algèbres de Lie affines que nous énonçons (sans démonstrations) pour finir, et qui présentent l'avantage de se transposer rigoureusement au langage de la théorie des champs. On pourra sauter en première lecture les paragraphes en italiques.

1) Opérateurs de vertex

Des mathématiciens (voir en particulier [22]) ont décrit une construction associant à certains réseaux entiers \mathbb{P} une algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ dont le rang et les racines sont reliés de manière très simple à \mathbb{P} . C'est la définition de ces algèbres de Lie qui est particulièrement intéressante pour notre étude : elle fait intervenir des opérateurs, sur un espace de Fock, analogues des opérateurs de Mandelstam étudiés en théorie des champs, et utilise une prescription d'ordre issue de la physique. En outre la construction repose sur des opérateurs, dits de vertex, qui jouent un rôle central dans les théories des représentations que nous présenterons dans les sections suivantes.

a) Réseaux et espaces de Fock associés

Soit V un espace vectoriel de dimension N muni d'une forme bilinéaire non dégénérée (en pratique, un espace euclidien ou de Minkowski), et \mathbb{P} un réseau dans V , c'est-à-dire un ensemble de points de la forme :

$$\mathbb{P} = \left\{ \sum_{i=1}^N n_i v_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

où (v_i) est une base de V . On suppose de plus que \mathbb{P} est entier, ie $\forall r, s \in \mathbb{P} \quad r \cdot s \in \mathbb{Z}$. En particulier, les carrés des normes des éléments de \mathbb{P} sont entiers ; soit $\mathbb{P}_1 = \{r \in \mathbb{P} \mid r^2 = 1\}$ et $\mathbb{P}_2 = \{r \in \mathbb{P} \mid r^2 = 2\}$.

Nous allons construire une algèbre d'opérateurs associée à \mathbb{P} . L'espace sur lequel ils opèrent sera un espace de Fock \mathcal{A} engendré par des opérateurs de création

$$\{a_{-n}^{\mu} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \mu \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$$

agissant sur des états «vides» orthogonaux (ψ_p) indicés par les $p \in \mathbb{P}$ (appelés moments). On définit de plus les opérateurs de destruction (et la structure hilbertienne) par

$$a_n^{\mu} = a_{-n}^{\mu\dagger} \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad a_n^{\mu} \psi_p = 0 \quad \text{et} \quad [a_m^{\mu}, a_n^{\nu\dagger}] = mg^{\mu\nu} \delta_{mn}.$$

On se donne enfin un opérateur «observable de moment» $a_0^{\mu} = P^{\mu}$, commutant avec les opérateurs de création et vérifiant

$$P^{\mu} \psi_p = p^{\mu} \psi_p$$

(le sous-espace propre associé à p est donc celui engendré par l'action des opérateurs de création sur ψ_p), et un opérateur de création de moment qui est unitaire et peut se mettre sous la forme :

$$e^{ir \cdot Q} \psi_{r'} = \psi_{r'+r}.$$

L'opérateur Q vérifie les relations de commutation $[Q^{\mu}, P_{\nu}] = i\delta_{\nu}^{\mu}$.

b) Algèbre associée à un réseau entier

L'objet central pour la définition des nouveaux opérateurs de création et de l'algèbre $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ est l'opérateur de vertex ($r \in \mathbb{P}_2$, $z \in \mathbb{C}$)

$$X(r, z) = z^{\frac{1}{2}r^2} : e^{ir \cdot \Xi(z)} : \quad \text{où} \quad \Xi^{\mu}(z) = Q^{\mu} - i \log(z) P^{\mu} + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n} z^{-n} a_n^{\mu}.$$

Cette définition pose deux problèmes : choix de l'ordre et détermination du logarithme (par contre la convergence est assurée pour z convenable). On pose en fait :

$$X(r, z) = z^{\frac{1}{2}r^2} e^{ir \cdot \Xi_{<}(z)} e^{ir \cdot Q} z^{r \cdot P} e^{ir \cdot \Xi_{>}(z)} \quad \text{où} \quad (59)$$

$$\Xi_{>}^{\mu}(z) = i \sum_{n>0} \frac{1}{n} z^{-n} a_n^{\mu} \quad \text{et} \quad \Xi_{<}^{\mu}(z) = i \sum_{n<0} \frac{1}{n} z^{-n} a_n^{\mu}$$

(l'ordre consiste donc à placer, de gauche à droite, les opérateurs de création, les opérateurs Q et P , puis les opérateurs d'annihilation). Les puissances de z sont bien définies car $r^2 = 2$ pour $r \in \mathbb{P}_2$ et $r \cdot p \in \mathbb{Z}$ pour p valeur propre de P . On définit alors les opérateurs de création annoncés par intégration de l'opérateur de vertex sur un contour entourant une fois l'origine (dans le sens direct) dans le plan complexe :

$$X(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint X(r, z) \frac{dz}{z}. \quad (60)$$

Quelles relations de commutation ces opérateurs vérifient-ils ? Le produit de deux exponentielles ordonnées se factorise par la formule (pour $|\zeta| < |z|$) :

$$: e^{ir \cdot \Xi(z)} :: e^{is \cdot \Xi(\zeta)} := : e^{ir \cdot \Xi(z) + is \cdot \Xi(\zeta)} : (z - \zeta)^{r \cdot s}, \quad (61)$$

qui découle des calculs classiques de commutateurs déjà effectués en théorie des champs (basés sur l'identité $e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A, B]} e^{A+B}$ pour $[A, B]$ commutant avec A et B) :

$$e^{ir \cdot \Xi_{>}(z)} e^{is \cdot \Xi_{<}(\zeta)} = \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{r \cdot s} e^{is \cdot \Xi_{<}(\zeta)} e^{ir \cdot \Xi_{>}(z)} \quad \text{pour } |\zeta| < |z|,$$

$$z^{r \cdot P} e^{is \cdot Q} = z^{r \cdot s} e^{is \cdot Q} z^{r \cdot P}.$$

La factorisation (61) donne par double intégration une expression de $X(r)X(s)$, en échangeant r et s et z et ζ on obtient la même expression pour $X(s)X(r)$ au signe $(-1)^{r \cdot s}$ près, et avec la condition $|\zeta| > |z|$ pour l'intégration. D'où l'expression pour $X(r)X(s) - (-1)^{r \cdot s} X(s)X(r)$:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{d\zeta}{\zeta} \left(\oint_{|z|>|\zeta|} \frac{dz}{z} - \oint_{|z|<|\zeta|} \frac{dz}{z} \right) z^{\frac{1}{2}r^2} \zeta^{\frac{1}{2}s^2} (z - \zeta)^{r \cdot s} : e^{ir \cdot \Xi(z) + is \cdot \Xi(\zeta)} :, \quad (62)$$

à laquelle s'applique le théorème de Cauchy : la deuxième intégration se fait sur le bord d'une couronne centrée à l'origine et contenant ζ . Lorsque $r \cdot s \geq 0$ il n'y a pas de pôle dans la couronne, lorsque $r \cdot s = -1$ il y en a un en $z = \zeta$ (de plus $r+s \in \mathbb{P}_2$ et on obtient l'expression (60) de $X(r+s)$), et lorsque $r \cdot s = -2$ (ie $r = -s$) il est double (on utilise alors l'identité $iz \frac{d\Xi^{\mu}}{dz} = \sum a_n^{\mu} z^{-n}$). D'où le résultat :

$$X(r)X(s) - (-1)^{r \cdot s} X(s)X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \cdot s \geq 0 \\ X(r+s) & \text{si } r \cdot s = -1 \\ r \cdot P & \text{si } r \cdot s = -2. \end{cases} \quad (63)$$

Ce sont presque des relations de commutation, on a besoin pour conclure d'une famille d'opérateurs auto-adjoints (δ_u) ($u \in \mathbb{P}$) vérifiant

$$\delta_u \delta_v = (-1)^{u \cdot v} \delta_v \delta_u,$$

et commutant avec les $X(r)$. On suppose ici que le réseau est tel qu'une telle famille existe (c'est par exemple le cas pour un réseau pair, on peut trouver des méthodes pour construire de tels cocycles dans [25]). Alors la famille d'opérateurs $X^{\delta}(r) = X(r)\delta_r$ vérifie les relations de commutation

$$[X^{\delta}(r), X^{\delta}(s)] = \begin{cases} 0 & \text{si } r \cdot s \geq 0 \\ \pm X^{\delta}(r+s) & \text{si } r \cdot s = -1 \\ r \cdot P & \text{si } r \cdot s = -2. \end{cases} \quad (64)$$

On vérifie de plus aisément, sur $X(r, z)$, $X(r)$ puis $X^{\delta}(r)$ les relations supplémentaires :

$$[P^{\mu}, X^{\delta}(r)] = r^{\mu} X^{\delta}(r), \quad X^{\delta}(r)^{\dagger} = X^{\delta}(-r) \quad \text{et} \quad P^{\mu \dagger} = P^{\mu}. \quad (65)$$

L'algèbre $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ annoncée plus haut est alors définie comme l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $X^{\delta}(r)$ et P^{μ} . On montre, du moins dans le cas euclidien, qu'elle est de rang N et de racines les points de \mathbb{P}_2 : on obtient ainsi facilement des algèbres de rang et racines spécifiées.

c) Opérateurs fermioniques

Dans le cadre de l'équivalence entre fermions et bosons on est d'autre part conduit à se demander si la construction de b) peut s'adapter pour donner des opérateurs fermioniques, malgré le cadre bosonique qu'est l'espace \mathcal{A} construit en a). Une idée pour ce faire est de s'intéresser non plus à \mathbb{P}_2 mais à \mathbb{P}_1 . Imaginons pour l'instant [cf. ci-dessous] que la construction des $X(r)$ reste valide pour $r \in \mathbb{P}_1$ et examinons ce que deviennent les pseudo-relations de commutation (63) (les seules possibilités pour $e, f \in \mathbb{P}_1$ étant $e = f$, $e \cdot f = 0$ et $e = -f$) :

$$\begin{aligned} X(e)^2 &= 0 \\ X(e)X(f) - X(f)X(e) &= 0 \quad \text{si } e \cdot f = 0 \\ X(e)X(-e) + X(-e)X(e) &= 1. \end{aligned}$$

La première est typiquement fermionique, et en supposant à nouveau l'existence d'opérateurs de cocycle ε ,

$$X^\varepsilon(e) = \varepsilon_e X(e), \quad \text{avec} \quad \varepsilon_u \varepsilon_v = (-1)^{(u \cdot v)^2 - u^2 v^2} \varepsilon_v \varepsilon_u, \quad [\varepsilon_u, A_e] = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_u^\dagger = \varepsilon_u,$$

on obtient des opérateurs de création et annihilation :

$$\{X^\varepsilon(e), X^\varepsilon(f)\} = 0 \quad \text{sauf si } e = -f, \quad X^\varepsilon(e)^\dagger = X^\varepsilon(-e),$$

qui engendrent une algèbre de Lie $\mathfrak{b}_\mathbb{P}$ fermionique (en dimension 1, on obtient ces résultats sans avoir besoin de cocycle).

[Examinons rapidement la définition de $X(r)$ quand $r \in \mathbb{P}_1$: l'exposant de z dans (59), ie $\frac{1}{2}r^2 + r \cdot p$ pour p valeur propre de P , doit être entier, il faut donc que $r \cdot p \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ce qui s'obtient en prenant, dans la définition de \mathcal{A} , $p \in v_0 + \mathbb{P}$ plutôt que $p \in \mathbb{P}$, avec v_0 un vecteur bien choisi de V (ce faisant on ne modifie en fait que les valeurs propres de P ; $X(r, z)$ étant toujours défini pour $r \in \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$).]

On peut interpréter l'espace vectoriel V comme l'espace ambiant (de Minkowski et de dimension 2 ou 4 dans la partie B)). La construction de l'espace de Fock \mathcal{A} effectuée en a) est quasiment la même que celle de la seconde quantification rappelée en A)3), dans cette optique les a_μ^n (pour $n < 0$) sont des opérateurs bosoniques de création de particule dans des états indicés par n et μ (particule libre en translation avec une impulsion discrète, typiquement). On dispose de plus de la variable d'état discrète P du système, qui prend ses valeurs dans \mathbb{P} , et en change sous l'action des opérateurs $e^{iP \cdot Q}$.

Les opérateurs $X^\varepsilon(r)$ s'interprètent bien, dans ce cadre, comme opérateurs, fermioniques, de création et annihilation pour des états particuliers du système : si on fixe une moitié de \mathbb{P}_1 pour choisir les opérateurs de création, ceux-ci anticommulent entre eux, mais pas avec les opérateurs restant (d'annihilation), qui sont en outre leurs adjoints. On crée ainsi de nouveaux états particuliers fermioniques dans un nombre restreint d'états (indicés par \mathbb{P}_1), qu'on peut rapprocher des solitons de la partie B) (en dimension 1 d'espace la construction ne donne qu'un opérateur de création — mais l'espace ambiant n'est pas invariant par translation). La tactique suivie ici pour construire ces nouveaux opérateurs est cependant différente de celle qui a mené aux opérateurs (50) : on passe par un opérateur de vertex dont les commutateurs ou anticommutateurs sont suffisamment réguliers (mais non constants) pour s'annuler lors de l'intégration sur un contour bien choisi du plan complexe. La méthode peut sembler plus générale, mais on n'obtient pas les propriétés plus fortes des opérateurs (50) : équations de champ ... On retrouvera de tels opérateurs de vertex en 3).

2) Représentations linéaires et espaces de configuration

Abandonnant (provisoirement) les opérateurs de création, nous nous proposons maintenant de présenter la construction d'un isomorphisme entre une algèbre symétrique et une algèbre extérieure illustrant les structures plus profondes qui sous-tendent les équivalences entre fermions et bosons : on utilise notamment deux représentations du groupe de boucle $\Gamma = C^\infty(S^1, SO(2))$ dans ces algèbres, construites de manière élémentaire par Graeme Segal dans [36], et dont on montre l'équivalence.

a) Actions de Γ

Soit F l'espace des fonctions de S^1 dans \mathbb{R} régulières sauf en 0, telles que $f(0^-) \equiv f(0^+) [2\pi]$. Soit F_0 l'espace des fonctions régulières de S^1 dans \mathbb{R} , et soit F_{00} son sous-espace des fonctions d'intégrale nulle. Soit Γ le groupe (pour la multiplication point par point) des fonctions régulières de S^1 dans $SO_2(\mathbb{R}) \simeq S^1$ (canoniquement). Il s'identifie canoniquement à F par $f \rightarrow e^{if} \in \Gamma$, soit Γ_0 et Γ_{00} les sous-groupes de Γ associés à F_0 et F_{00} dans cette identification. On note n_f le nombre d'enroulements autour de l'origine de $\phi = e^{if}$, Γ_0 est aussi le sous-groupe de Γ des fonctions de nombre d'enroulements nul.

Soit $B_{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions régulières de S^1 dans \mathbb{R}^2 (fonctions d'onde, dans \mathbb{R}^2 , des particules fermioniques), $B_{\mathbb{C}}$ son complexifié (fonctions à valeurs dans \mathbb{C}^2), et B un sous-espace de $B_{\mathbb{C}}$ identifiable à $B_{\mathbb{R}}$ [cf. ci-dessous], munis du produit scalaire L^2 . La première algèbre considérée sera la complétion en un espace de Hilbert de l'algèbre extérieure totale associée à B (ou $B_{\mathbb{R}}$) :

$$\mathcal{B} \equiv \overline{\bigoplus \wedge^k B}.$$

Soit $A_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $A_{\mathbb{R}} = F_{00}$ déjà introduit (fonctions d'onde, dans \mathbb{R} , des particules bosoniques), et A un sous-espace de $A_{\mathbb{C}}$ identifiable à $A_{\mathbb{R}}$ [cf. ci-dessous]. Soit la forme bilinéaire :

$$s(f, g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f'(\theta)g(\theta)d\theta + \frac{1}{2}n_f g(0), \quad (66)$$

on définit un produit scalaire sur A par $(f_1|f_2) = 2is(\bar{f}_1, f_2)$. La seconde algèbre est la complétion (au sens de Hilbert) de l'algèbre symétrique totale associée à A (ou $A_{\mathbb{R}}$) :

$$\mathcal{A} \equiv \overline{\bigoplus S^k(A)}.$$

On va maintenant donner deux représentations linéaires de Γ , sur \mathcal{A} et \mathcal{B} .

[On définit sur $B_{\mathbb{R}}$ une structure complexe de la manière suivante. Soit la base de \mathbb{C}^2 : $\varepsilon = (1, -i)$ et $\bar{\varepsilon} = (1, i)$, et celle (hilbertienne) de $B_{\mathbb{C}}$: $(e_n : \theta \rightarrow \varepsilon e^{in\theta})$ et $(\bar{e}_n : \theta \rightarrow \bar{\varepsilon} e^{-in\theta})$. Soit $B = \text{Vect}\{e_n / n \geq 0\} \cup \{\bar{e}_n / n < 0\}$ et $\bar{B} = \text{Vect}\{e_n / n < 0\} \cup \{\bar{e}_n / n \geq 0\}$, et J l'opérateur défini par $J|_B = i$, $J|_{\bar{B}} = -i$. On vérifie que $B_{\mathbb{R}}$ est stable par J , qui définit la structure complexe voulue ($J^2 = -1$, $if \equiv J(f)$), et pour laquelle $B_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $B \subset B_{\mathbb{C}}$. On définit une structure complexe sur $A_{\mathbb{R}}$ de la même manière, à l'aide des sous-espaces de $A_{\mathbb{C}}$: $A = \text{Vect}\{\theta \rightarrow e^{in\theta} / n > 0\}$ et $\bar{A} = \text{Vect}\{\theta \rightarrow e^{in\theta} / n < 0\}$, on a alors $A_{\mathbb{R}} \simeq A$.]

[Γ agit naturellement sur $B_{\mathbb{R}}$ à travers son groupe orthogonal ($\Gamma \subset O(B_{\mathbb{R}})$ à isomorphisme près) : $\forall \phi \in \Gamma, \forall f \in B_{\mathbb{R}}, \forall \theta \in S^1$ ($\phi \cdot f$)(θ) $\equiv \phi(\theta)f(\theta)$. En fait on a même $\Gamma \subset O_J(B_{\mathbb{R}})$, où $O_J(B_{\mathbb{R}})$ est le sous-groupe des opérateurs orthogonaux O dont le commutateur avec J , $[O, J]$, est de Hilbert-Schmidt (T est de Hilbert-Schmidt si $\text{Tr}(T^*T) < +\infty$). Autrement dit, les opérateurs de Γ commutent «presque» avec J , donc sont «presque» \mathbb{C}_J -linéaires. On dispose d'une représentation linéaire classique, unitaire et projective, de $O_J(B_{\mathbb{R}})$ sur \mathcal{B} , dite spinorielle et notée σ , dont hérite Γ . Soit c son cocycle. Nous utiliserons plus particulièrement la représentation projective infinitésimale de l'algèbre de Lie tangente à $O_J(B_{\mathbb{R}})$ en Id , $o_J(B_{\mathbb{R}})$ (opérateurs symétriques bornés O tels que $[O, J]$ soit de Hilbert-Schmidt), $S : O \rightarrow S(O) \in S(\mathcal{B})$, vérifiant $[S(O), S(O')] = S([O, O']) + \gamma(O, O')$ où γ est le cocycle qui provient de c .]

Γ hérite d'une représentation classique, dite spinorielle, de $O_J(B_{\mathbb{R}})$ sur \mathcal{B} [cf. ci-dessus], elle est unitaire et projective :

$$\sigma : \phi \rightarrow \sigma(\phi) \in U(\mathcal{B}) \quad \text{vérifie} \quad \sigma(\phi_1)\sigma(\phi_2) = c(\phi_1, \phi_2)\sigma(\phi_1\phi_2), \quad (67)$$

où $c : \Gamma^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est le cocycle qui s'exprime pour $e^{if}, e^{ig} \in \Gamma$:

$$c(e^{if}, e^{ig}) = e^{-is(f, g)}. \quad (68)$$

s est la forme bilinéaire (66). La sous-algèbre tangente au groupe Γ est simplement constituée des opérateurs sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ de multiplication par les e^{if} avec $f \in F_0$, et la relation de commutation déduite de (67) pour la représentation infinitésimale S associée à σ s'y simplifie d'après (68) en :

$$[S(f), S(g)] = 2is(f, g). \quad (69)$$

Introduisons maintenant l'action de Γ sur \mathcal{A} . On définit d'abord une action ρ , projective de cocycle c , de $\Gamma_{00} \simeq A$ sur \mathcal{A} , en gros par exponentiation de la multiplication de l'algèbre symétrique totale [cf. plus bas]. Les éléments de Γ_0 se déduisent de ceux de Γ_{00} par multiplication par une

constante de $SO(2) \simeq S^1$ que l'on peut faire agir trivialement (multiplication scalaire) sur \mathcal{A} . Mais pour faire agir Γ en entier il nous faut en fait un espace plus grand que $\mathcal{A} : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k$ où les \mathcal{A}_k sont de simples copies de \mathcal{A} (les «secteurs de charge»). Un élément générique de Γ s'écrit $\phi(\theta) = ue^{if(\theta)}e^{in\theta}$ avec $u \in SO(2)$, $f \in F_{00}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on le fait agir sur \mathcal{A}_k par $\rho(e^{if})$, puis par multiplication par u^k et enfin par envoi dans \mathcal{A}_{n+k} . Cette représentation projective de Γ a le même cocycle c que celles précédemment définies, on montre en outre qu'elle est irréductible.

[ρ est plus précisément définie sur Γ_{00} comme suit : A agit trivialement sur $\bigoplus S^k(A)$ par la multiplication de l'algèbre symétrique totale, on note cette action, étendue à \mathcal{A} , $f \rightarrow R(f)$. On pose alors pour $\bar{f} \in \bar{A} : R(\bar{f}) = R(f)^\dagger$, ce qui définit R sur $A_{\mathbb{C}}$ entier, donc sur $F_{00} = A_{\mathbb{R}} \subset A_{\mathbb{C}}$. On obtient l'action de Γ_{00} par exponentiation : si $g = e + \bar{f} \in F_{00}$, on pose $\rho(e^{ig}) = e^{iR(e)}e^{iR(\bar{f})}$.]

b) Isomorphisme entre \mathcal{B} et $\bigoplus \mathcal{A}_k$

Nous allons maintenant établir le résultat d'isomorphisme annoncé, que nous interpréterons dans la section suivante : les espaces de Hilbert \mathcal{B} et $\bigoplus \mathcal{A}_k$ sont isomorphes en tant que représentations de Γ . On va en fait donner la construction explicite de deux plongements isométriques, l'un de \mathcal{B} dans $\bigoplus \mathcal{A}_k$, et l'autre de $\bigoplus \mathcal{A}_k$ dans \mathcal{B} , compatibles avec les actions de Γ .

Pour définir le morphisme voulu de $\bigoplus \mathcal{A}_k$ dans \mathcal{B} il suffit d'envoyer chaque sous-espace \mathcal{A}_k dans \mathcal{B} de manière analogue, au moyen d'un morphisme isométrique de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ dans \mathcal{B} , compatible avec les actions de Γ_0 . Il s'agit donc d'envoyer un élément $f_1 f_2 \cdots f_k$ de $S^k(A)$ dans \mathcal{B} , on remarque pour cela que A est non seulement l'espace de base pour la construction de \mathcal{A} , mais aussi, à l'isomorphisme $A \simeq A_{\mathbb{R}} = F_{00}$ près, un sous-espace de l'algèbre tangente à Γ évoquée en a). On pose donc en utilisant la représentation infinitésimale de σ ($f_i \in A_{\mathbb{R}} \subset F_0$) :

$$f_1 f_2 \cdots f_k \rightarrow S(f_1)S(f_2) \cdots S(f_k) \cdot 1_{\mathcal{B}},$$

ce qui est possible car les $S(f)$, $f \in A$, commutent entre eux d'après (69) (et par isotropie de A pour son produit scalaire : les fonctions de F_{00} sont d'intégrale nulle). Le morphisme ainsi défini de \mathcal{A}_0 vers \mathcal{B} est isométrique, et, par construction, compatible avec les actions de Γ_{00} (donc aussi de Γ_0), comme on le voit en comparant les représentations infinitésimales : multiplication à gauche par f et $S(f)$ respectivement, pour $f \in A_{\mathbb{R}} \cap A$ (sous-espaces de $A_{\mathbb{C}}$), opération adjointe des deux côtés pour $f \in A_{\mathbb{R}} \cap \bar{A}$. Il se prolonge de manière unique en un morphisme de $\bigoplus \mathcal{A}_k$ vers \mathcal{B} compatible avec Γ en entier : en faisant agir $\phi_n = (\theta \rightarrow e^{in\theta})$ dans l'espace de départ on passe d'un élément de \mathcal{A}_0 à l'élément correspondant de \mathcal{A}_n , le morphisme doit donc se prolonger à \mathcal{A}_n par simple composition par $\sigma(\phi_n)$.

On s'inspire de la première construction pour définir le second morphisme, de \mathcal{B} vers $\bigoplus \mathcal{A}_k$: on cherche à associer à chaque vecteur f de $B_{\mathbb{R}} \simeq B$ un opérateur $T(f)$ sur $\bigoplus \mathcal{A}_k$ pour définir ensuite le morphisme par :

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k \rightarrow T(f_1)T(f_2) \cdots T(f_k) \cdot 1_{\mathcal{A}_0}. \quad (70)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle définition soit licite est l'anticommutation des $T(f)$. On peut alors remarquer que si f et g sont deux éléments de F à supports disjoints tels que n_f et n_g soient impairs, alors les opérateurs $\rho(e^{if})$ et $\rho(e^{ig})$ sur $\bigoplus \mathcal{A}_k$ anticommulent. Par définition du cocycle on a en effet :

$$\rho(e^{if})\rho(e^{ig}) = \rho(e^{ig})\rho(e^{if})e^{-i(s(f,g)-s(g,f))}. \quad (71)$$

Mais si e^{if} et e^{ig} sont à supports disjoints, l'intégrale dans $s(f,g)$ est nulle et il ne reste que le terme $1/2n_f g(0)$. Alors, si par exemple $f(0) \neq 0$, on a soit $f(2\pi) = 0$, auquel cas $f(0) = -2\pi n_f$, soit $g(2\pi) = 0$, et alors $n_g = 0$ (car $g(0) = 0$), et ainsi $s(f,g) - s(g,f) = \pi n_g n_f$. Dans tous les cas on vérifie de la même manière :

$$\rho(e^{if})\rho(e^{ig}) = \rho(e^{ig})\rho(e^{if})e^{\pm i\pi n_f n_g}.$$

En utilisant des éléments $\phi_{\alpha,\varepsilon}$ de Γ qui font un tour de S^1 (de 1 à 1) lorsque leur variable décrit un voisinage (mesuré par ε) de $\alpha \in S^1$, et par un passage à la limite, on obtient ainsi une famille d'opérateurs anticommutable $(T_\alpha)_{\alpha \in S^1}$:

$$T_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\phi_{\alpha,\varepsilon}).$$

Les T_α jouent le même rôle que les opérateurs de vertex de la section précédente. On peut par ailleurs remarquer que l'expression (66) de s , qui assure leur anticommuation, est du même type

que celle des opérateurs de Mandelstam (50) introduits en B)7). On obtient $T(f)$ pour $f \in B$, avec les relations d'anticommutation voulues, en intégrant cette famille contre $(\alpha \rightarrow f(\alpha) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C})$, et en faisant agir le résultat sur \mathcal{A}_k où k est le nombre d'enroulements de f autour de l'origine. Comme plus haut, l'utilisation de la représentation ρ de Γ sur l'espace d'arrivée $\oplus \mathcal{A}_k$ et la forme de la définition (70) assurent la compatibilité avec les actions de Γ .

Les deux isométries (en particulier injectives) ainsi construites donnent par composition un endomorphisme injectif de $\oplus \mathcal{A}_k$ compatible avec l'action ρ de Γ . Mais cette représentation étant irréductible, le lemme de Schur assure que l'endomorphisme en question est multiple de l'identité (voir par exemple [44] pour ce résultat de base). Les deux morphismes construits sont par conséquent des isomorphismes.

c) Interprétation

On revient ici à un espace ambiant unidimensionnel et même cyclique (le cercle S^1). D'autre part, les espaces étudiés ont été construits de manière moins abstraite qu'en 1) et sont directement interprétables comme espaces de fonctions d'onde (complétés). Ainsi \mathcal{B} est un espace complété de fonctions antisymétriques sur S^1 avec un nombre arbitraire de variables, à valeurs dans \mathbb{R}^2 (le champ de Dirac est à valeurs dans \mathbb{C}^2) : c'est un espace des états fermioniques. De même \mathcal{A} , espace de fonctions d'ondes symétriques sur S^1 et à valeurs réelles (comme le champ de Klein-Gordon), est un espace des états bosoniques.

Les résultats obtenus sont alors très complets du point de vue de la bosonisation (hormis les équations d'évolutions) : on retrouve un isomorphisme entre les espaces des états bosonique et fermionique, analogue de celui établi en B)6) (mais entre des sous-espaces uniquement). On peut de plus remarquer qu'il a fallu à cet effet agrandir l'espace bosonique en le recopiant, les états de \mathcal{A}_k peuvent s'interpréter comme des états liés classiques renfermant k particules dans un nouvel état particulière, à rapprocher bien sûr des états solitoniques introduits en B)8) (on n'obtient ici, comme dans la section précédente, qu'un état, pour une dimension d'espace). Enfin, la construction effectuée a le mérite de faire apparaître une structure, le groupe Γ et ses actions, derrière les opérateurs de création de chaque espace. Par exemple, l'action de $f \in A \simeq F_{00}$ sur un état $f_1 f_2 \cdots f_n$ à n particules de \mathcal{A}_k ajoute une particule indépendante (de fonction d'onde f) au système, tandis que l'action de $(\theta \rightarrow e^{ip\theta})$ sur le même espace crée p solitons.

3) Représentation des algèbres de Lie affines et bosonisation

La théorie de la représentation des algèbres de Lie affines, dont une présentation complète (cf. notamment [25]) dépasse le cadre de cet exposé, permet en quelque sorte une synthèse des idées développées dans les deux sections précédentes : opérateurs de vertex et algèbre associée à un réseau, interprétation des algèbres d'opérateurs fermionique et bosonique comme représentations d'une même structure. Nous présenterons les constructions et résultats obtenus sans entrer dans les détails, leur intérêt particulier étant la possibilité d'en déduire rigoureusement des résultats analogues en théorie des champs.

a) Constructions et résultats

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe munie d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , L le système de racines de \mathfrak{g} relatif à \mathfrak{h} , \mathbb{L} le réseau associé et Λ un système de racines simples (cf. [37] pour l'étude des algèbres de Lie simple complexes). On se donne également un cocycle ε et une base de Chevalley $\{x_\alpha^\varepsilon / \alpha \in \mathbb{L}\}$ avec les relations de commutations ($h \in \mathfrak{h}$) :

$$[h, x_\alpha^\varepsilon] = (h|\alpha), \quad (72)$$

$$[x_\alpha^\varepsilon, x_\beta^\varepsilon] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin L \cup 0 \\ \varepsilon(\alpha, \beta) x_{\alpha+\beta}^\varepsilon & \text{si } \alpha + \beta \in L \\ -\alpha & \text{si } \alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad (73)$$

L'algèbre de Lie affine \mathfrak{G} associée à \mathfrak{g} est définie comme espace vectoriel et muni d'un crochet de Lie :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \\ [x(n), y(m)] &= [x, y](n+m) + n \delta_{n,-m} (x|y) c, \end{aligned} \quad (74)$$

où on note $x(n)$ l'élément $t^n \otimes x$ de \mathfrak{G} ($x \in \mathfrak{g}$ et $n \in \mathbb{Z}$). c est l'élément central de l'algèbre affine.

On peut alors définir une action, dite de vertex, de \mathfrak{G} sur un espace vectoriel (espace des états) \mathcal{A} , qui correspond à l'espace de Fock de 1)a) [cf. ci-dessous]. \mathcal{A} est muni d'opérateurs de création indicés par les $\mu(n) \in \mathfrak{H}^*$ et $\mu \in \mathfrak{h}^*$ (et notés de la même manière), ce sont les analogues des a_n et Q de 1)a). L'action de \mathfrak{G} sur \mathcal{A} est définie grâce à un opérateur de vertex ($\mu \in \mathbb{L}$, $z \in \mathbb{C}$) :

$$X(\mu, z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \mu(-n)\right) \exp(\ln(z)\mu(0) + \mu) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n} \mu(n)\right). \quad (75)$$

Comme dans la première section, on utilise cet opérateur par une intégration sur un contour encerclant l'origine : on définit les opérateurs $X_n(\mu)$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $\mu \in \mathbb{L}$) par

$$X_n(\mu) \cdot v = \operatorname{Res}_{z=0} (z^{n-1} X(\mu, z) \cdot v) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

et on les modifie en $X_n^\varepsilon(\mu) = X_n(\mu)\varepsilon_\mu$ pour obtenir le bon cocycle. L'action projective des $x_\alpha^\varepsilon(n) \in \mathfrak{G}$ ($\alpha \in L$) sur \mathcal{A} est alors définie comme étant celle de $X_n^\varepsilon(\alpha)$ ($\alpha \in L$), et celle de $\mu(n) \in \mathfrak{H}^* \simeq \mathfrak{H}$ est déjà construite (opérateurs de création sur \mathcal{A} — on utilise l'identification entre \mathfrak{H} et \mathfrak{H}^* induite par la forme bilinéaire invariante sur \mathfrak{h}). Si on part de $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2l)$, on obtient en particulier une représentation de $\mathfrak{D}(2l)$, dite de vertex : Λ est une base orthonormée de \mathfrak{h}^* notée (h_i) , le cocycle est défini par $\varepsilon(h_i, h_j) = 1$ si $i < j$, et par -1 sinon.

[\mathcal{A} est plus précisément défini comme $S(\mathfrak{H}^-) \otimes \mathbb{C}[\mathbb{P}]$ où \mathbb{P} est un réseau contenant \mathbb{L} tel que $(\mathbb{P}|\mathbb{L}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{P}|\mathbb{P}) \in \mathbb{Z}$. μ agit sur $\mathbb{C}[\mathbb{P}]$ en tant qu'élément de \mathbb{P} , et $\mu(n)$ agit sur $S(\mathfrak{H}^-)$ en tant qu'élément de \mathfrak{H}^* . L'expression (75) est bien définie sur les sous-espaces de \mathcal{A} associés aux orbites \mathbb{P}_k de \mathbb{L} dans \mathbb{P} qui vérifient $(\mathbb{P}_k|\mathbb{L}) \subset \mathbb{Z}$, pour les autres $(\mathbb{P}_k|\mathbb{L}) \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ on rajoute $\frac{1}{2}$ à la puissance de z .]

Soit $C(Z^{2l})$ ($Z = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$) l'algèbre de Clifford de dimension infinie engendrée par les éléments $e_i(m)$ ($i \in \llbracket 1, 2l \rrbracket$ et $m \in Z$) avec les relations d'anticommutation :

$$\{e_i(k), e_j(m)\} = -2\delta_{ij}\delta_{k,-m}.$$

On réalise $C(Z^{2l})$ comme algèbre d'opérateurs sur un nouvel espace des états \mathcal{B} pour lequel les éléments suivants deviennent opérateurs de création :

$$\begin{aligned} b_j(m) &= \frac{1}{2}(e_j(m) + ie_{j+l}(m)) \quad \text{et} \\ b_{-j}(m) &= \frac{1}{2}(e_j(m) - ie_{j+l}(m)) \quad (j \in \llbracket 1, l \rrbracket \text{ et } m \in Z) \end{aligned} \quad (76)$$

(il s'agit d'un simple changement de base dans $C(Z^{2l})$). On vérifie qu'ils anticommulent, sauf les couples $b_j(m)$ et $b_{-j}(-m)$, d'anticommutateur -1 ; \mathcal{B} est donc un espace fermionique.

Soit $\mathfrak{E} = \{r(n) = \sum \lambda_i e_i(n) \mid r = \sum \lambda_i e_i(0)\}$. On définit un ordre normal sur \mathfrak{E} par

$$: r(k)s(n) := \begin{cases} r(k)s(n) & \text{si } n > k \\ \frac{1}{2}(r(k)s(n) - s(n)r(k)) & \text{si } n = k \\ -s(n)r(k) & \text{si } n < k. \end{cases}$$

Lorsque $r_1, r_2 \in \operatorname{Vect} \{e_i(0)\}$, $: r_1 r_2 :$ décrit un sous-espace de \mathfrak{E} qui n'est autre que $\mathfrak{o}(2l)$, et on construit donc dans $C(Z^{2l})$ une algèbre d'opérateurs isomorphe à l'algèbre affine $\mathfrak{D}(2l)$ en posant pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$: r_1 r_2 : (m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : r_1(k) r_2(m-k) : .$$

Cela définit une nouvelle représentation de $\mathfrak{D}(2l)$, sur \mathcal{B} , dite spinorielle.

Comme en 2), on montre en étudiant leurs structures que les deux représentations de $\mathfrak{D}(2l)$ ainsi construites, et les espaces de configurations correspondants, sont isomorphes. On a même les identifications entre opérateurs :

$$b_i(n) = X_n^\varepsilon(h_i) \quad \text{et} \quad b_{-i}(n) = X_n^\varepsilon(-h_i). \quad (77)$$

On démontre également les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{\pm i}(k) b_{\pm j}(m-k) &= X_m^\varepsilon(\pm h_i \pm h_j) \quad (i < j) \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} : b_i(k) b_{-i}(m-k) : &:= h_i(m) \end{aligned}$$

(tous ces résultats, ainsi que ceux de la section suivante, sont établis par Frenkel dans [21]).

b) Lien avec la théorie des champs

Nous revenons maintenant à l'étude d'un système bosonique décrit par des champs de Klein-Gordon :

$$[\phi_j(u_1), \phi_k(u_2)] = -\frac{i}{2} \delta_{jk} \text{sign}(u_1 - u_2), \quad j, k \in \llbracket 1, l \rrbracket$$

(u_1 et u_2 sont ici des coordonnées sur le cône de lumière : $u_1 = x - t$ ou $x + t$). Les opérateurs de courant ($j_k(u) = \partial \phi_k(u) / \partial u$) sur l'espace des états forment une algèbre caractérisée par les relations de commutation :

$$[j_k(u_1), j_m(u_2)] = \frac{i}{2} \delta_{km} \delta'(u_1 - u_2). \quad (78)$$

Nous allons relier cette algèbre à la représentation de vertex de $\mathfrak{D}(2l)$ construite en a). En présence de conditions aux limites périodiques (système confiné dans une boîte de longueur L), on peut développer j_i :

$$j_i(u) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_i(n) e^{-2\pi i n \frac{u}{L}}.$$

Les relations de commutation (78) entraînent d'autres pour les opérateurs $h_i(n)$, qui se trouvent être celles, (74), de l'algèbre de Lie affine $\mathfrak{D}(2l)$ construite en a). C'est par l'intermédiaire de ces opérateurs que nous pourrions donc utiliser les résultats de la section précédente.

En l'absence de conditions périodiques, d'autre part, on écrit :

$$j_i(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_i(p) e^{-ipu} dp.$$

Ce sont ces opérateurs qui nous intéressent en théorie des champs, il se trouve qu'on peut les relier aux précédents. Soit M une constante positive fixée, alors $\mathfrak{D}(2l)$ (représentée par les opérateurs $h_i(n)$) est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre des $\tilde{h}_i(p)$, par les correspondances (transformation de Laguerre) :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i(\pm p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-Mp} L_n^{-1}(2Mp) h_i(\pm n) \\ h_i(\pm n) + (-1)^{n-1} h_i(0) &= (-1)^{n-1} 2M \int_0^{\infty} \tilde{h}_i(\pm p) e^{-Mp} L_n^{-1}(2Mp) dp \\ h_i(0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_i(p) e^{-M|p|} \frac{dp}{p-i}, \end{aligned} \quad (79)$$

où les L_n^α sont les polynômes de Laguerre. En fait ce sont ces égalités qui servent à construire mathématiquement l'algèbre des opérateurs quantiques renormalisés (M est ainsi une constante de renormalisation) et à définir une prescription d'ordre (notée N_M) pour les exponentielles d'opérateurs.

Intéressons-nous maintenant à un système fermionique décrit par le champ de Dirac :

$$\{\psi_j(u_1), \psi_k^+(u_2)\} = \delta_{jk} \delta(u_1 - u_2) \quad \text{et} \quad \{\psi_j(u_1), \psi_k(u_2)\} = \{\psi_j^+(u_1), \psi_k^+(u_2)\} = 0 \quad (80)$$

(ce ne sont plus ici les courants qui nous intéressent). Comme plus haut, en présence de conditions aux limites périodiques on peut écrire :

$$\begin{aligned} \psi_j(u) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_{-j}(n) e^{-2\pi i n \frac{u}{L}} \\ \psi_j^+(u) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_j(n) e^{-2\pi i n \frac{u}{L}}. \end{aligned}$$

On obtient grâce à (80) des relations de commutation pour les opérateurs $b_i(n)$, et il se trouve que ceux sont les mêmes que celles des opérateurs (76) définis dans la représentation spinorielle de $\mathfrak{D}(2l)$. Comme précédemment, ces opérateurs vont nous permettre d'exploiter les résultats de a).

D'autre part, on écrit dans le cas général :

$$\begin{aligned}\psi_j(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b}_{-j}(p) e^{-ipU} dp \\ \psi_j^+(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b}_j(p) e^{-ipU} dp,\end{aligned}$$

et comme plus haut on relie les opérateurs $\tilde{b}(p)$ à la représentation spinorielle de $\mathfrak{D}(2l)$: celle-ci est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre des $\tilde{b}(p)$ avec en particulier les correspondances, qui prennent à nouveau la forme de transformées de Laguerre :

$$\begin{aligned}\tilde{b}(\pm p) &= \sqrt{2M} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-Mp} L_m^0(2Mp) b(\pm m \pm \frac{1}{2}) \\ b(\pm m \pm \frac{1}{2}) &= (-1)^m \sqrt{2M} \int_0^{\infty} \tilde{b}(\pm p) e^{-Mp} L_m^0(2Mp) dp.\end{aligned}\tag{81}$$

On montre alors que les deux isomorphismes ci-dessus, (79) et (81), associés à l'isomorphisme (77) entre les deux représentations de $\mathfrak{D}(2l)$ présenté en a), donnent un isomorphisme entre les algèbres d'opérateurs $\tilde{b}_i(p)$ et $\tilde{h}_i(p)$ et les espaces des états, qui se traduit au niveau des opérateurs de champ par les correspondances :

$$\begin{aligned}\psi_j^\pm(u) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2M}} N_M e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\phi_j(u)} \varepsilon_j \\ &: \psi_j^+(u) \psi_j(u) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \phi_j(u) \\ &: \psi_j^\pm(u) \psi_k^\pm := \frac{1}{2m} N_M e^{2i\sqrt{\pi}(\pm\phi_j(u) \pm \phi_k(u))} \varepsilon_j \varepsilon_k \quad (j \neq k).\end{aligned}$$

Ces résultats sont très semblables à ceux des physiciens, cf. en particulier (56). Ils illustrent en particulier comment les méthodes d'opérateurs de vertex rejoignent celles des exponentielles ordonnées d'opérateurs exposée en B)6) et B)7).

Conclusion

Les opérateurs de création de Mandelstam, dont on a décrit les propriétés physiques étonnantes (passage d'un comportement bosonique à un comportement fermionique, avec apparition d'interactions dans le cas $g = 0$), ont des analogues mathématiques (les opérateurs de vertex, modulo une intégration) qui jouent un rôle central dans l'étude des représentations des algèbres de Lie affines (ou plus généralement, des algèbres de Kac-Moody). La théorie physique est, elle, encore ouverte : a-t-on des équivalences entre fermions et bosons en dimension d'espace supérieure à 1 ? On peut espérer que des avancées dans l'une des théories permettra de mieux comprendre l'autre. L'équivalence entre fermions et bosons est en effet loin de n'être qu'un résultat anecdotique en physique, mais peut déboucher sur la mise au point d'une théorie globale et économique en physique des particules : des tentatives d'unification entre fermions et bosons ont déjà été menées avec les théories dites de supersymétries (utilisant des superalgèbres d'opérateurs, ie avec relations de commutation et d'anticommutation), mais elles n'ont pour l'instant pas fourni de résultats phénoménologiquement intéressants. Au contraire, les états solitoniques étudiés en B)8) ont déjà été mis en évidence dans les applications de la théorie des champs à la physique de la matière condensée.

Deuxième partie

Groupes Quantiques Compacts Matriciels

Stage de DEA
sous la direction de Georges Skandalis
mercredi 9 juin 1999

Avertissement

La plus grande partie des résultats de ce mémoire provient des articles de Woronowicz [45, 47], cf. aussi [27], bien que la présentation s'en écarte parfois. Certaines démonstrations ont été entièrement ou partiellement réécrites pour s'inscrire dans le plan adopté : lemme 1.1, corollaire 2.2, théorème 3, propositions 14, 15 et 16, théorème 5. D'autres sont nouvelles : corollaire 3.2, proposition 9, corollaire 5.2. Enfin les résultats de l'appendice A sont, à ma connaissance, nouveaux.

Les REMARQUES qui suivent les énoncés indiquent parfois des réciproques, exemples et contre-exemples, introduits plus loin ou ailleurs, mais replacent le plus souvent les résultats obtenus dans le cadre plus large des groupes quantiques localement compacts (C^* -algèbres de Hopf, algèbres de Kac-von Neumann) : cf. définition 1, proposition 1, corollaire 2.1, corollaire 3.3 et proposition 11, corollaire 5.1, corollaire 5.2 où les liens avec la physique des particules sont présentés.

A) Groupes quantiques compacts matriciels

1) Motivations

Soit G un groupe fini. Si G est abélien, l'ensemble G' des caractères de G est muni d'une structure naturelle de groupe fini abélien, et on a $G'' = G$ (cf. par exemple [8, §1, th. 2]). Mais si G n'est pas abélien, on n'a pas de groupe dual G' naturel. On peut cependant étendre la dualité des groupes abéliens finis à tous les groupes finis, en se plaçant dans la catégorie plus grande des algèbres de Hopf (de dimension finie).

Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension finie muni d'une involution ($a \mapsto a^*$), d'une multiplication $m \in L(H \otimes H, H)$ et d'une comultiplication $\Delta \in L(H, H \otimes H)$, d'une unité $\eta \in L(\mathbb{C}, H) \simeq H$ et d'une counité $\varepsilon \in L(H, \mathbb{C})$, et d'une antipode $S \in L(H)$. On dit que H est une bialgèbre involutive (de dimension finie) si (H, m, η) est une algèbre involutive, (H, Δ, ε) , une coalgèbre involutive (structure naturelle, par transposition des opérations, du dual d'une algèbre — la coassociativité de Δ s'écrit ainsi $(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$), et que les deux structures sont compatibles : ε et Δ sont des morphismes involutifs d'algèbres unifères (ce qui équivaut au fait que m et η sont des morphismes involutifs de coalgèbres counifères). On dit que H est une algèbre de Hopf involutive (de dimension finie) si de plus S est un morphisme d'algèbres et de coalgèbres, et vérifie les identités : $m \circ (S \otimes \text{Id}) \circ \Delta = m \circ (\text{Id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$ et $(S \circ *)^2 = \text{Id}$. Pour plus de précisions on pourra se référer à [39, chap. IV].

Pour G groupe fini d'unité e , on note $\mathbb{K}_a(G)$ (algèbre de Kac abélienne) l'algèbre involutive \mathbb{C}^G (munie de la multiplication et de la conjugaison ponctuelles). C'est une algèbre de Hopf de dimension finie si on pose en outre $\Delta(a)(g, h) = a(gh)$ (dans l'identification $\mathbb{C}^G \otimes \mathbb{C}^G \simeq \mathbb{C}^{G \times G}$), $\varepsilon(a) = a(e)$ et $S(a)(g) = a(g^{-1})$. Elle est abélienne au sens où l'algèbre sous-jacente est abélienne, et on peut montrer (grâce à l'antipode S et à la théorie de Gelfand-Naïmark) que toutes les algèbres de Hopf involutives abéliennes de dimension finie sont de ce type. On note d'autre part $\mathbb{K}_s(G)$ (algèbre de Kac symétrique) l'algèbre involutive unifère $\mathbb{C}G$ (munie du produit de convolution et de l'involution $g^* = g^{-1}$). C'est une algèbre de Hopf de dimension finie si on pose en outre $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ et $S(g) = g^{-1}$. Elle est symétrique au sens où l'algèbre sous-jacente est coabélienne (ie $\Delta(\mathbb{K}_s(G)) \in \mathbb{K}_s(G) \otimes_{\text{sym}} \mathbb{K}_s(G)$), et on peut montrer que toutes les algèbres de Hopf involutives symétriques de dimension finie sont de ce type.

La dualité des espaces vectoriels induit naturellement, par transposition, une dualité des algèbres de Hopf de dimension finie (qui fait se correspondre algèbres abéliennes et algèbres symétriques), donc une dualité entre groupes finis (identifiés à leur algèbre de Kac abélienne) et algèbres de Kac symétriques, qui prolonge la dualité des groupes abéliens finis : pour G abélien fini, $\mathbb{K}_a(G)$ est symétrique, donc l'algèbre duale est abélienne, c'est $\mathbb{K}_a(G') = \mathbb{K}_s(G)$. Le dual naturel d'un groupe fini G est donc l'algèbre de Hopf symétrique $\mathbb{K}_s(G)$.

Une des motivations des définitions du paragraphe 2) est l'extension de ces raisonnements aux groupes localement compacts (pour lesquels la théorie de Pontryagin, dans le cas commutatif, reste valable). On n'y parviendra que partiellement : cf. la REMARQUE suivant la proposition 1, et le paragraphe C)2).

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe compact. On peut montrer que G est rigide : si (G_ν) est une famille de groupes de Lie «dépendant continûment de ν » avec $G_1 = G$ (ie mutuellement homéomorphes et tels que les constantes de structure des algèbres de Lie associées dépendent continûment de ν), alors les G_ν sont tous isomorphes à G . Ces groupes jouent pourtant un rôle

important en physique des particules, et il serait intéressant de pouvoir les déformer : la déformation du groupe de Poincaré en les groupes de Minkowski (avec paramètre c) a par exemple joué un rôle crucial dans l'introduction de la relativité restreinte.

L'idée pour ce faire est d'utiliser les méthodes de la géométrie non commutative (remplacer l'algèbre des fonctions sur l'espace étudié par une C^* -algèbre non nécessairement commutative, en s'inspirant de la théorie de Gelfand-Naïmark : cf. [7, §6]), qui a par ailleurs prouvé son efficacité pour mieux exprimer la mécanique quantique comme une déformation de la mécanique classique. Les données d'une théorie classique sont ainsi typiquement une variété, «l'espace des phases» (\mathbb{R}^6 dans le cas particulièrement simple d'une particule libre), et des fonctions définies sur cette variété, les «observables» (\vec{p} et \vec{q}), qui commutent. Dans la version quantique, on se donne une C^* -algèbre (dont les états s'interprètent comme points d'un pseudo-espace des phases) engendrée par des observables vérifiant certaines relations de commutation (avec un paramètre de déformation), qui deviennent triviales dans le cas classique ($[p^i, q^j] = -i\hbar\delta_{ij}$, par exemple). [Souvent en physique cette C^* -algèbre est plongée dans un espace de Hilbert (grâce au théorème classique : [18, th. 2.6.1]), les vecteurs ζ de norme 1 définissant alors des états $f_\zeta : r \rightarrow (\zeta|r\zeta)$.]

Une des motivations des définitions du paragraphe 2) est l'application de ces méthodes au problème de la déformation des groupes de Lie compacts semi-simples. Cet objectif sera atteint en C)4), C)5) et dans l'appendice A où on étudiera une déformation (dans une catégorie plus grande que celle des groupes) de $SU(2)$, groupe de symétrie des théories avec particules de spin 1/2 (dans lesquelles il recouvre le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace).

Plus précisément, on appelle (suivant [27]) comultiplication sur une C^* -algèbre A un morphisme de C^* -algèbres Φ de A vers l'algèbre $M(A \otimes A)$ des multiplicateurs de $A \otimes A$, non dégénéré (ie $\Phi(A)(A \otimes A)$ est dense dans $A \otimes A$), et tel que $(\text{Id} \otimes \Phi) \circ \Phi = (\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Phi$ (coassociativité). Un monoïde quantique localement compact est une C^* -algèbre A munie d'une comultiplication. Si A est unifère (ce qu'on supposera dorénavant), le monoïde quantique est dit compact, $M(A \otimes A) = A \otimes A$ et la non-dégénérescence de Φ équivaut à $\Phi(1) = 1 \otimes 1$. Dans le cas commutatif on retrouve par le théorème de Gelfand-Naïmark [30, §16, th. 1] les monoïdes compacts «classiques». Or un monoïde compact G est un groupe **ssi** il est régulier, **ssi** les fonctions de la forme $(g, h) \mapsto a(g)b(gh)$ ou $(g, h) \mapsto a(h)b(gh)$ sont denses dans $C^0(G \times G)$ (cf. par exemple [27, prop. 3.2 et 3.3]). Il est donc naturel d'appeler groupe quantique compact une C^* -algèbre unifère A munie d'un morphisme unifère $\Phi : A \rightarrow A \otimes A$ coassociatif (toujours $(\text{Id} \otimes \Phi) \circ \Phi = (\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Phi$), tel que $A \otimes 1 \Phi(A)$ et $1 \otimes A \Phi(A)$ sont denses dans $A \otimes A$. Une représentation de (A, Φ) sur un espace de Hilbert H est un élément $v \in M(L(H) \otimes A)$ tel que $v \oplus v = \text{Id} \otimes \Phi(v)$, où on note $v \oplus w = \sum v_i w_j \otimes a_i \otimes b_j$ pour $v = \sum v_i \otimes a_i$ et $w = \sum w_j \otimes b_j$.

Dans la suite on se consacre à l'étude des groupes quantiques compacts matriciels, suivant [45, 49]. Il s'agit des groupes quantiques compacts (A, Φ) admettant une représentation de dimension finie v non dégénérée ainsi que sa conjuguée (inversibilité de v et $v^{-\otimes *}$), et dont les éléments de matrice engendrent une sous-algèbre involutive \mathcal{A} dense dans A . Dans le cas classique, $\mathcal{A} = C^\infty(G)$ par le théorème de Stone-Weierstraß. Φ est alors déterminée par la «représentation fondamentale» v , et on a existence d'un antipode et d'une counité sur \mathcal{A} , qui devient ainsi une algèbre de Hopf involutive : cf. définition 1 et sa REMARQUE. En fait on ne restreint pas beaucoup le champ de l'étude en se limitant au cas matriciel : le cas compact s'en déduit par limite inductive (on peut montrer qu'un groupe quantique compact (A, Φ) admet un ensemble «fondamental» de représentations, ie dont les éléments de matrice engendrent A , et le groupe quantique est matriciel quand cet ensemble est fini). De plus les exemples intéressants entrent dans le cadre matriciel.

2) Définitions

Soit A une C^* -algèbre et $v = \sum v_i \otimes a_i$, $w = \sum w_j \otimes b_j$ des éléments de $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$. On note $v \oplus w = \sum v_i w_j \otimes a_i \otimes b_j$.

Définition 1 Soit A une C^* -algèbre unifère. Soit $u = (u_{kl}) \in M_n(A)$ et \mathcal{A} l'algèbre involutive engendrée par $\{u_{kl}\}$. (A, u) est appelé **groupe quantique compact matriciel** (de dimension n) si \mathcal{A} est dense dans A , et s'il existe un morphisme unifère de C^* -algèbres $\Phi : A \rightarrow A \otimes A$ et une application linéaire antimultiplicative $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tels que :

$$\text{Id} \otimes \Phi(u) = u \oplus u, \quad (1)$$

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad \kappa(\kappa(a^*)^*) = a, \quad \text{et} \quad (2)$$

$$\text{Id} \otimes \kappa(u) = u^{-1}. \quad (3)$$

Φ et κ sont déterminés par A et u , et respectivement appelés **comultiplication** et **coinverse** du groupe quantique.

REMARQUE. On utilise dans cette définition, et dans la suite, le produit tensoriel spatial de C^* -algèbres (cf. [35] pour une présentation rapide), et les résultats de prolongement [40, chap. IV, prop. 4.22 et 4.23]. En outre on vérifie aisément, sur les u_{kl} , la coassociativité de $\Phi : (\text{Id} \otimes \Phi) \circ \Phi = (\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Phi$, et on établira au paragraphe 4) la densité de $A \otimes 1$ $\Phi(A)$ et $1 \otimes A$ $\Phi(A)$ dans $A \otimes A$. Ainsi la définition 1 entre dans le cadre des groupes quantiques compacts décrit précédemment. Par ailleurs l'existence de κ vérifiant (2) et (3) entraîne facilement l'inversibilité de u et $\bar{u} = u^{-\otimes*}$, on verra au corollaire 3.2 que la réciproque est vraie.

D'autre part, l'existence d'unité découle des autres axiomes :

Proposition 1 *Soit (A, u) un groupe quantique compact matriciel. Il existe un unique caractère involutif $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que*

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad m \circ (\kappa \otimes \text{Id}) \circ \Phi(a) = m \circ (\text{Id} \otimes \kappa) \circ \Phi(a) = e(a)1. \quad (4)$$

e est appelé **counité** de (A, u) .

// Soit \mathcal{A}_0 l'ensemble des $a \in \mathcal{A}$ tels que $m \circ \kappa \otimes \text{Id} \circ \Phi(a)$ et $m \circ \text{Id} \otimes \kappa \circ \Phi(a)$ sont un même multiple $e(a)1$ de 1. On vérifie aisément que pour $a, a' \in \mathcal{A}_0$, a^* et aa' appartiennent à \mathcal{A}_0 avec $e(a^*) = \overline{e(a)}$ et $e(aa') = e(a)e(a')$. Par exemple pour cette dernière assertion, on pose $\Phi(a) = \sum b_k \otimes c_k$ et $\Phi(a') = \sum b'_{k'} \otimes c'_{k'}$, et on a :

$$\begin{aligned} m \circ (\kappa \otimes \text{Id}) \circ \Phi(aa') &= \sum \kappa(b'_{k'}) \kappa(b_k) c_k c_{k'} \\ &= e(a) \sum \kappa(b'_{k'}) c'_{k'} = e(a)e(a'). \end{aligned}$$

D'autre part $\{u_{kl}\} \subset \mathcal{A}_0$ d'après la définition (3) de κ (poser $e(u_{kl}) = \delta_{kl}$). Ainsi \mathcal{A}_0 est une sous-algèbre involutive de \mathcal{A} contenant u_{kl} , donc c'est \mathcal{A} . On obtient ainsi l'existence, l'unicité est évidente. //

Les propriétés de la counité s'expriment agréablement en termes de produit de convolution : on note

$$\begin{aligned} \omega * a &= (\text{Id} \otimes \omega) \circ \Phi(a), \\ a * \omega' &= (\omega' \otimes \text{Id}) \circ \Phi(a), \quad \text{et} \\ \omega * \omega' &= (\omega \otimes \omega') \circ \Phi, \end{aligned}$$

pour $\omega, \omega' \in \mathcal{A}^*$ et $a \in \mathcal{A}$, ou bien $\omega, \omega' \in A'$ et $a \in A$, et on a alors (avec en général $e \in \mathcal{A}^*$ seulement, donc pour $a \in \mathcal{A}$) :

$$\begin{aligned} \omega' * \omega(a) &= \omega(a * \omega') = \omega'(\omega * a), \\ e * a &= a * e = a \quad \text{et} \quad \omega * e = e * \omega = \omega. \end{aligned} \quad (5)$$

// Les premières égalités s'obtiennent par des manipulations faciles du produit tensoriel : par exemple, $\omega' * \omega(a) = (\omega' \otimes \omega) \circ \Phi(a) = \omega' \circ (\text{Id} \otimes \omega) \circ \Phi(a) = \omega'(\omega * a)$. Elles permettent par ailleurs de déduire les dernières des suivantes. Celles-là se démontrent par la technique déjà utilisée pour la Proposition : soit $\mathcal{A}_0 = \{a \in A \mid e * a = a\}$, on vérifie facilement que \mathcal{A}_0 contient les u_{kl} et est une sous-algèbre involutive de A , donc c'est \mathcal{A} . //

REMARQUE. Φ , κ et e munissent \mathcal{A} d'une structure d'algèbre de Hopf (de dimension infinie), au sens de 1). Cependant la dualité n'est pas aussi agréable qu'en dimension finie, à cause notamment du fait que le bidual d'une C^* -algèbre n'est pas en général une C^* -algèbre (il faut utiliser les W^* -algèbres pour avoir un bon comportement vis-à-vis de la dualité). Le bon cadre pour le prolongement de la dualité de Pontrjagin des groupes localement compacts abéliens est celui des algèbres de Kac-von Neumann : cf. [20]. Dans notre cas la dualité passe par les représentations unitaires irréductibles, comme on le verra en C). Les caractères coïncidant précisément, dans le cas abélien «classique», avec les représentations irréductibles, cette dualité (de Tannaka-Krein) prolonge aussi, d'une certaine manière, celle de Pontrjagin, malgré son manque de symétrie.

Définition 2 Un morphisme de groupes quantiques de (A, u) vers (B, v) est un morphisme de C^* -algèbres $\Psi : A \rightarrow B$ tel que $(\Psi \otimes \Psi) \circ \Phi_A = \Phi_B \circ \Psi$, avec des notations évidentes. Cela munit la classe des groupes quantiques compacts matriciels d'une structure de catégorie. On dit que (B, v) est un **sous-groupe quantique** de (A, u) s'il existe un morphisme surjectif de groupes quantiques de A vers B . On dit que (A, u) et (B, v) sont **identiques** (resp. **semblables**) s'il existe un isomorphisme (de groupes quantiques) $\Psi : A \rightarrow B$ tel que $\text{Id} \otimes \Psi(u) = v$ (resp. PvP^{-1} pour une matrice $P \in GL(n)$).

Ces définitions sont justifiées par les exemples du paragraphe suivant. On appelle parfois les sous-groupes quantiques «quotients», en effet les C^* -algèbres sous-jacentes aux sous-groupes quantiques de (A, u) sont aussi (à isomorphisme près) les quotients de A par ses idéaux fermés I tels que $\Phi(I) \subset I \otimes A + A \otimes I$ (voir à ce sujet [43]).

3) Exemples

Comme indiqué dans les motivations, les premiers exemples proviennent des groupes «classiques». Soit G un groupe compact matriciel (ie sous-groupe compact de $GL(n)$), $A = C^0(G)$ et $\kappa l w_G : G \rightarrow \mathbb{C}, (g_{ij})_{ij} \mapsto g_{kl}$. On a $\mathcal{A} = C^\infty(G)$. En identifiant $A \otimes A$ et $C^0(G \times G)$ on peut définir une comultiplication par $\Phi(a) : (g, g') \mapsto a(gg')$ (la vérification de (1) découle immédiatement de l'égalité $w_G(gg') = w_G(g)w_G(g')$: en effet $w_G(g) = g!$). L'existence de κ découle de l'inversibilité de u et \bar{u} : cf. corollaire 3.2. Ainsi $(C^0(G), w_G)$ est un groupe quantique compact matriciel. Il est commutatif, au sens où A est commutative, et on a en fait :

Proposition 2 Soit (A, u) un groupe quantique compact tel que A est commutative. Il existe un sous-groupe compact de $GL(n)$ tel que $(C^0(G), w_G)$ est identique à (A, u) .

// Soit $X(A)$ l'ensemble des caractères de A . On pose en s'inspirant de la théorie de Gelfand-Naïmark : $G = \{\text{Id} \otimes \chi(u) \mid \chi \in X(A)\} \subset M_n(\mathbb{C})$.
C'est un compact (cf. [40, chap. I, prop. 3.10]). Il est stable par multiplication :

$$(\text{Id} \otimes \chi(u))(\text{Id} \otimes \chi'(u)) = \text{Id} \otimes \chi \otimes \chi'(u \oplus u) = \text{Id} \otimes ((\chi \otimes \chi') \circ \Phi)(u)$$

et $(\chi \otimes \chi') \circ \Phi$ est un caractère. Il est de même composé d'éléments inversibles car (4) assure que $\text{id} \otimes (\chi \circ \kappa)(u)$ est l'inverse de u , et $\chi \circ \kappa$ est un caractère (κ est donné par la formule $\kappa(a) : g \mapsto a(g^{-1})$). La stabilité par inversion en découle grâce à la compacité : soit $g \in G$ et $\lim g^{\varphi(n)} \in G$ une valeur d'adhérence de $(g^n)_n$, en posant $\psi(n) = \varphi(n+1) - (\varphi(n) + 1)$ il vient $g^{-1} = \lim g^{\psi(n)} \in G$.

Soit alors $\Psi : C^0(G) \rightarrow A$ le morphisme de C^* -algèbre défini par $f(\text{Id} \otimes \chi(u)) = \chi(\Psi(f))$, c'est un isomorphisme d'après la théorie de Gelfand-Naïmark : [40, chap. I, th. 4.4], qui vérifie bien sûr $\text{Id} \otimes \Psi(w_G) = u$. //

On dit que G et (A, u) sont associés. Il y a un seul groupe associé à (A, u) et les groupes quantiques associés à G sont les groupes quantiques identiques à $(C^0(G), w_G)$. On peut d'autre part vérifier que les définitions 2 et 3 (paragraphe suivant) correspondent dans le cas commutatif aux notions classiques, par exemple $\Psi : C^0(G) \rightarrow C^0(H)$ est un morphisme de groupes quantiques **ssi** ($H \rightarrow G, \chi \mapsto \chi \circ \Psi$) est un morphisme de groupe. On remarquera en particulier le changement de sens et le passage de l'injectivité à la surjectivité, qui justifie la définition des sous-groupes quantiques.

Il est naturel de vouloir passer, par «dualité», des groupes compacts matriciels aux groupes discrets à un nombre fini de générateurs. Soit Γ un groupe muni d'un système fini de générateurs $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Soit U_Γ une représentation (unitaire) fidèle de Γ telle que $U_\Gamma \otimes U_\Gamma$ soit contenue dans un multiple de U_Γ , on note $u_\Gamma = \text{diag}(U_\Gamma(\gamma_1), \dots, U_\Gamma(\gamma_n))$ et $A = C^*(U_\Gamma) \subset L(H)$ la C^* -algèbre engendrée par $U_\Gamma(\Gamma)$ (H est l'espace de U_Γ).

Proposition 3 $(C^*(U_\Gamma), u_\Gamma)$ est un groupe quantique compact. Il est cocommutatif, au sens où $\Phi(A) \in A \otimes_{\text{op}}$, et tout groupe quantique compact cocommutatif est semblable à un $(C^*(U_\Gamma), u_\Gamma)$ avec Γ groupe discret à un nombre fini de générateurs, et U_Γ une représentation fidèle de Γ telle que $U_\Gamma \otimes U_\Gamma$ soit contenue dans un multiple de U_Γ .

// A est l'algèbre involutive engendrée par les $U_\Gamma(\gamma_i)$, elle contient donc, par définition des γ_i et de $U_\Gamma, U_\Gamma(\Gamma)$, et est bien dense dans A .

On sait par ailleurs que $U_\Gamma \otimes U_\Gamma$ est contenue dans un multiple de U_Γ , autrement dit il existe un espace de Hilbert K et $W \in L(H \otimes H, K \otimes H)$ tels que

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad U_\Gamma(\gamma) \otimes U_\Gamma(\gamma) = W^* \circ (\text{Id}_K \otimes U_\Gamma(\gamma)) \circ W.$$

On peut alors définir un morphisme de C^* -algèbres par $\Phi(a) = W^* \circ \text{Id}_K \otimes a \circ W$, il vérifie $\Phi(U_\Gamma(\gamma)) = U_\Gamma(\gamma) \otimes U_\Gamma(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc en particulier (1) et $\Phi(A) \in A \otimes_{\text{sym}} A$. Il est enfin clair que $u_\Gamma = \bar{u}_\Gamma$ est inversible, et l'existence de κ en découle comme plus haut grâce au corollaire 3.2.

La démonstration de la seconde partie du théorème nécessite le théorème de décomposition des représentations (lisses) : cf. corollaire 2.2. //

4) Représentations : définitions

La définition du paragraphe 1) se spécialise dans le cas des groupes quantiques compacts matriciels et des espaces de dimension finie en la définition 3. Les notions habituelles de la théorie des représentations des groupes s'y généralisent : définitions 4 et 5.

Définition 3 On appelle **représentation** sur E (\mathbb{C} -ev. de dim. finie) du groupe quantique (A, u) un élément v de $L(E) \otimes A$ tel que

$$\text{Id} \otimes \Phi(v) = v \oplus v.$$

La **dimension** de v est celle de E . v est dite **lisse** si $v \in L(E) \otimes A$. u définit une représentation de (A, u) , appelée **représentation fondamentale** du groupe quantique.

Soit v, w des représentations de $G = (A, u)$. Pour $\omega \in A'$ on note $v_\omega = \text{Id} \otimes \omega(v) \in L(E)$, cela s'étend à $\omega \in \mathcal{A}^*$ si v est lisse. Pour $\lambda \in L(E)^*$ on pose de même $\lambda v = \lambda \otimes \text{Id}(v)$, et si λ parcourt la base de $L(E)^*$ associée à une base (e_k) de E , on note ${}_{kl}v = e_l^{\alpha*}(u^\alpha e_k^\alpha)$ la famille de A correspondante. On pose de plus, pour $v = \sum_1^k v_i \otimes a_i$ et $w = \sum_1^l w_j \otimes b_j$:

$$\begin{aligned} v \oplus w &= \sum (v_i \oplus 0) \otimes a_i + \sum (0 \oplus w_j) \otimes b_j, \\ v \oplus w &= \sum v_i \otimes w_j \otimes a_i b_j \quad \text{et} \\ \bar{v} &= \sum \bar{v}_i \otimes a_i^*. \end{aligned}$$

On note $\text{Rep}(G)$ la classe des représentations de G , et $\text{Rep}_0(G)$ la plus petite classe de représentations de G contenant les représentations fondamentale et triviale, et stable par équivalence, somme directe, produit tensoriel, conjugaison et passage aux sous-représentations, au sens des définitions qui suivent.

Définition 4 Soit $v \in L(E)$, $w \in L(F)$ des représentations du groupe quantique compact matriciel (A, u) . Alors $v \oplus w \in L(E \oplus F)$, $v \oplus w \in L(E \otimes F)$ et $\bar{v} \in L(E)$ sont des représentations de (A, u) , dites respectivement **somme directe** de v et w , **produit tensoriel** de v et w , et **conjuguée** de v . v est dite **équivalente** à w s'il existe $s \in GL(E, F)$ tel que $(s \otimes \text{Id})v = w(s \otimes \text{Id})$, ce qu'on note $v \stackrel{s}{\sim} w$. $1 = \text{Id}_\mathbb{C} \otimes 1$ et $0_E \otimes 0$ sont des représentations de (A, u) sur \mathbb{C} et E , dites respectivement **triviale** et **nulles**.

Définition 5 Soit $v \in L(E) \otimes A$ une représentation de (A, u) . v s'identifie canoniquement à un élément \hat{v} de $L(E, E \otimes A)$. On dit que F , sous-espace de E , est **stable** sous v si $\hat{v}(F) \subset F \otimes A$. Alors la restriction de \hat{v} à F et $F \otimes A$ définit une représentation w de (A, u) sur F . On dit que w est une **sous-représentation** de v , ou que v **contient** w , et on note $w \subset v$. v est dite **non-dégénérée** si elle ne contient aucune représentation nulle de dimension non nulle, **irréductible** si elle ne contient aucune autre représentation qu'elle-même et la représentation triviale.

Proposition 4 Soit $v \in L(E) \otimes A$ une représentation lisse de (A, u) . Alors v est somme d'une représentation nulle et d'une représentation non dégénérée. v est non dégénérée **ssi** v est inversible dans $L(E) \otimes A$. Les éléments de $\text{Rep}_0(G)$ sont non dégénérés.

// Soit $E_0 = \text{Ker}(v_e)$ et $E_1 = \text{Im}(v_e)$. Pour toute $\omega \in \mathcal{A}^*$ on a $v_\omega \circ v_e = \text{Id} \otimes \omega \otimes e(v \oplus v) = (id \otimes \omega \otimes e) \circ (\text{Id} \otimes \Phi)(v) = v_{\omega * e} = v_\omega$ et de même $v_e \circ v_\omega = v_\omega$, ce qui implique de manière classique que $\forall \omega \in \mathcal{A}^* \quad \text{Id} \otimes \omega(\hat{v}(E_0)) = v_\omega(E_0) \subset E_0$. Ainsi E_0 , et de même E_1 , sont stables sous v . De plus ils sont en somme directe car $v_e \circ v_e = v_e$ d'après les mêmes égalités. Notant w_0 et w_1 les restrictions respectives de v à ces espaces, on a donc $v = w_0 \oplus w_1$.

Si $\hat{v}(x) = 0$, alors $v_e(x) = 0$ donc $x \in E_0$: ainsi w_1 est non dégénérée. Inversement pour $x \in E_0$ on a $\forall \omega \in \mathcal{A}^* \quad v_\omega(x) = v_\omega \circ v_e(x) = 0$ donc w_0 est nulle. On a démontré

la première affirmation.

En particulier, si v est non dégénérée on a $v_e = \text{Id}_E$. Mais d'autre part :

$$\begin{aligned} v_e \otimes 1 &= \text{Id} \otimes (1e)(v) \\ &= \text{Id} \otimes (m \circ (\kappa \otimes \text{Id}) \circ \Phi)(v) \quad \text{d'après (4)} \\ &= \text{Id} \otimes (m \circ (\kappa \otimes \text{Id}))(v \oplus v) \quad \text{car } v \text{ est une représentation} \\ &= (\text{Id} \otimes \kappa(v)) v, \end{aligned}$$

la dernière égalité se vérifiant si nécessaire en mettant v sous la forme $\sum m_i \otimes v_i$. Ainsi v est inversible à gauche et, de même, inversible à droite. Réciproquement, si v est inversible alors $\hat{v}(x) = 0 \Rightarrow x \otimes 1 = v^{-1} \hat{v}(x) = 0$ donc v est non dégénérée.

u est non dégénérée car inversible. Si v et w sont non dégénérées, $(v \oplus w)_e = v_e \oplus w_e = \text{Id}$, $(v \oplus w)_e = v_e \otimes w_e = \text{Id}$ et $\bar{v}_e = (v_e)^{\bar{}} = \text{Id}$ donc $v \oplus w$, $v \oplus w$ et \bar{v} sont non dégénérées. Il s'ensuit facilement que tous les éléments de $\text{Rep}_0(G)$ sont non dégénérés. //

Pour finir, on montre que la classe $\text{Rep}_0(G)$ est «riche» et on en déduit la densité de $A \otimes 1 \Phi(A)$ et $1 \otimes A \Phi(A)$ dans $A \otimes A$.

Proposition 5 *Il existe pour tout $a \in \mathcal{A}$ une représentation $v \in L(E) \otimes \mathcal{A}$ de $\text{Rep}_0(G)$ et une forme $\lambda \in L(E)^*$ telle que $a = \lambda v$.*

// Soit $\mathcal{A}_0 = \{\lambda v \mid v \in \text{Rep}_0(G), \lambda \in L(E_v)^*\}$. Par définition de $\text{Rep}_0(G)$ — stabilité par somme directe, produit tensoriel et conjugaison — \mathcal{A}_0 contient 1 et les u_{kl} , et est stable par addition, produit et conjugaison. Donc c'est \mathcal{A} . //

REMARQUE. On verra en fait (corollaire 2.1) que $\text{Rep}_0(G)$ coïncide avec l'ensemble des représentations inversibles.

Proposition 6 *$A \otimes 1 \Phi(A)$ et $1 \otimes A \Phi(A)$ sont denses dans $A \otimes A$.*

// Soit $a \in \mathcal{A}$. D'après la proposition 5 on peut écrire $a = \alpha_{kl} v$ où v est une représentation non dégénérée (car dans $\text{Rep}_0(G)$) de (A, u) , moyennant le choix d'une base convenable de son espace. On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha \sum_i ({}_{ki}(v^{-1}) \otimes 1) \Phi({}_{il}v) &= \alpha \sum_{i,j} ({}_{ki}(v^{-1}) \otimes 1) ({}_{ij}v \otimes {}_{jl}v) \\ &= \alpha \sum_j \delta_{kj} 1 \otimes {}_{jl}v = 1 \otimes a. \end{aligned}$$

Ainsi $1 \otimes a \in A \otimes 1 \Phi(A)$. Cela implique clairement $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \subset A \otimes 1 \Phi(A)$ donc la moitié du résultat voulu. L'autre s'obtient de la même manière. //

5) Mesure de Haar

La mesure de Haar est un des outils fondamentaux de la théorie des groupes compacts : cf. par exemple [9]. Rappelons qu'une mesure positive h sur un groupe localement compact G est dite invariante à gauche si elle vérifie

$$\forall a \in C^0(G) \quad \forall r \in G \quad \int a(rs) dh(s) = \int a(s) dh(s), \quad \text{ou encore :} \quad (6)$$

$$\forall \omega \in \mathcal{M}_+(G) \quad \forall a \in C^0(G) \quad \iint a(rs) d\omega(r) dh(s) = \omega(G) \int a(r) dh(r). \quad (7)$$

La définition suivante étend cette notion aux groupes quantiques non nécessairement commutatifs (en effet $\iint a(rs) d\omega_1(r) d\omega_2(s) = \int a(r) d(\omega_1 * \omega_2)(r)$).

Définition 6 *Soit (A, u) un groupe quantique compact matriciel. Un état $h \in A^*$ est dit **invariant à gauche** si :*

$$\forall a \in A \quad (\text{Id} \otimes h) \circ \Phi(a) = h(a) 1, \quad \text{ou encore :} \quad (8)$$

$$\forall \omega \in A'_+ \quad \omega * h = \omega(1) h. \quad (9)$$

On définit de même la notion d'**invariance à droite**, et on appelle **mesure de Haar** sur (A, u) un état sur A invariant à gauche et à droite.

On établit maintenant l'existence et l'unicité d'une mesure de Haar sur un groupe quantique compact matriciel. Le lemme qui suit permet de caractériser l'invariance de h «relativement à ω » : comparer avec (7) et (9) ci-dessus. On en donne la version classique puis la version «non commutative» : la comparaison met bien en évidence, nous semble-t-il, l'intérêt qu'il y a à considérer, heuristiquement, A comme un espace de fonctions sur un «pseudo-espace».

Lemme 1.1 *Soit G un groupe compact, ω et h deux mesures positives sur G . Alors on a :*

$$\begin{aligned} \forall a \in C^0(G) \quad & \iint a(rs) d\omega(r) dh(s) = \omega(G) \int a(r) dh(r) \\ \iff \forall a \in C^0(G) \quad & \iint |a_h(rs) - a_h(r)|^2 dh(r) d\omega(s) = 0, \end{aligned}$$

avec la notation (locale) $a_h = \int a(rs) dh(s)$.

// \Rightarrow s'obtient par un calcul simple : on développe $|a_h(rs) - a_h(r)|^2 = |a_h(rs)|^2 + |a_h(r)|^2 - 2 \operatorname{Re} a_h(r)^* a_h(rs)$ et on intègre séparément. Par hypothèse (appliquée à a_h) :

$$\iint |a_h(rs)|^2 dh(r) d\omega(s) = \omega(G) \int |a_h(r)|^2 dh(r), \quad \text{et bien sûr :} \quad (10)$$

$$\iint |a_h(r)|^2 dh(r) d\omega(s) = \omega(G) \int |a_h(r)|^2 dh(r). \quad (11)$$

De même, par hypothèse et par définition de a_h :

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{Re} \iint a_h(r)^* a_h(rs) dh(r) d\omega(s) &= -2 \operatorname{Re} \int a_h(r)^* \left(\iint a(rst) d\omega(s) dh(t) \right) dh(r) \\ &= -2 \operatorname{Re} \omega(G) \int a_h(r)^* \left(\int a(rt) dh(t) \right) dh(r) \\ &= -2 \operatorname{Re} \omega(G) \int |a_h(r)|^2 dh(r). \end{aligned} \quad (12)$$

La somme est bien nulle.

Pour \Leftarrow , on utilise la densité dans $C^0(G)$, quand a et b décrivent $C^0(G)$, des fonctions de la forme $(t \mapsto \int b(r) a(rt) dh(r))$. Il suffit ainsi de montrer :

$$\forall a, b \in C^0(G) \quad \iint \iint b(r) a(rst) dh(r) d\omega(s) dh(t) = \omega(G) \iint b(r) a(rt) dh(r) dh(t).$$

Or l'hypothèse implique, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in C^0(G) \quad & \iint b(r) (a_h(rs) - a_h(r)) dh(r) d\omega(s) = 0 \\ \iff & \iint \iint b(r) (a(rst) - a(rt)) dh(r) d\omega(s) dh(t) = 0, \quad (\text{définition de } a_h) \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'égalité recherchée. //

Lemme 1.1 (bis) *Soit (A, u) un groupe quantique compact matriciel, ω et h deux formes positives sur A . Alors on a :*

$$\begin{aligned} \omega \otimes h \circ \Phi = \omega(1)h &\iff \\ \forall a \in A \quad h \otimes \omega ((\Phi(a_h) - a_h \otimes 1)^* (\Phi(a_h) - a_h \otimes 1)) &= 0, \end{aligned}$$

avec la notation (locale) $a_h = \operatorname{id} \otimes h \circ \Phi(a)$

// On procède comme précédemment. Les équations (10), (11) et (12) deviennent :

$$\begin{aligned} h \otimes \omega (\Phi(a_h^* a_h)) &= \omega(1) h(a_h^* a_h), \\ h \otimes \omega (a_h^* a_h \otimes 1) &= \omega(1) h(a_h^* a_h), \quad \text{et} \\ h \otimes \omega [(a_h^* \otimes 1) \Phi(a_h)] &= h [a_h^* (\operatorname{Id} \otimes \omega \otimes h \circ \Phi \otimes \operatorname{Id} \circ \Phi(a))] \\ &= h [a_h^* (\operatorname{Id} \otimes (\omega \otimes h \circ \Phi) \circ \Phi(a))] \\ &= \omega(1) h [a_h^* (\operatorname{Id} \otimes h \circ \Phi(a))] \\ &= \omega(1) h(a_h^* a_h). \end{aligned} \quad (13)$$

Les justifications sont exactement les mêmes que plus haut, on a rajouté la ligne (13) pour mettre en évidence l'utilisation de la coassociativité et du calcul tensoriel élémentaire, qui rendent la lecture moins facile que dans le cas commutatif. Un calcul analogue donne le même résultat pour $h \otimes \omega[\Phi(a_h^*)(a_h \otimes 1)]$ et on en déduit immédiatement \Rightarrow , comme plus haut.

En tenant compte de la densité de $A \otimes 1 \Phi(A)$ dans $A \otimes A$, donc de $h \otimes \text{Id}(A \otimes 1 \Phi(A))$ dans A , on se ramène pour \Leftarrow à montrer

$$\begin{aligned} (\omega \otimes h) \circ \Phi \circ (h \otimes \text{Id})(b \otimes 1 \Phi(a)) &= \omega(1)(h \otimes h)(b \otimes 1 \Phi(a)), \quad \text{ou encore :} \\ (h \otimes \omega \otimes h) \circ (\text{Id} \otimes \Phi)(b \otimes 1 \Phi(a)) &= \omega(1)(h \otimes h)(b \otimes 1 \Phi(a)), \end{aligned}$$

pour $a, b \in A$. Or l'hypothèse implique, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A \quad h \otimes \omega((b \otimes 1)(\Phi(a_h) - a_h \otimes 1)) &= 0 \\ \iff h \otimes \omega[(b \otimes 1)(\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes h \circ \Phi \otimes \text{Id} \circ \Phi(a))] &= \omega(1)h(ba_h) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \iff h \otimes \omega \otimes h[(b \otimes 1 \otimes 1)(\Phi \otimes \text{Id} \circ \Phi(a))] &= \\ &= \omega(1)h[(b \otimes 1)(\text{Id} \otimes h \circ \Phi(a))] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\iff (h \otimes \omega \otimes h) \circ (\text{Id} \otimes \Phi)(b \otimes 1 \Phi(a)) = \omega(1)(h \otimes h)(b \otimes 1 \Phi(a))$$

(à nouveau, les justifications sont les mêmes que plus haut et les lignes (14) et (15) mettent en évidence l'utilisation de la coassociativité), ce qui est exactement l'égalité recherchée. //

Théorème 1 *Soit G un groupe quantique compact matriciel. Il existe une unique mesure de Haar h sur G . On a de plus :*

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathcal{A}^* \quad \eta * h &= h * \eta = \eta(1)h, \\ \forall a \in A \quad a * h &= h * a = h(a)1, \quad \text{et} \\ \forall a \in \mathcal{A} \quad h \circ \kappa(a) &= h(a). \end{aligned}$$

// Soit ω un état sur A , et $\omega_n = (\omega + \omega * \omega + \dots + \omega^{*n})/n$. La suite (ω_n) est bornée donc admet une valeur d'adhérence préfaible h_ω , qui est un état (car A est unifère) et vérifie $\omega * h_\omega = h_\omega$: en effet $\omega * \omega_n - \omega_n = (\omega^{*(n+1)} - \omega)/n$.

Par définition de la convolution et grâce à l'implication \Rightarrow du lemme 1.1, on a $\forall a \in A$ $h_\omega \otimes \omega((\Phi(a_{h_\omega}) - a_{h_\omega} \otimes 1)^*(\Phi(a_{h_\omega}) - a_{h_\omega} \otimes 1)) = 0$. Donc pour une autre forme ρ telle que $0 \leq \rho \leq \omega$ on a aussi $\forall a \in A$ $h_\omega \otimes \rho((\Phi(a_{h_\omega}) - a_{h_\omega} \otimes 1)^*(\Phi(a_{h_\omega}) - a_{h_\omega} \otimes 1)) = 0$ et, par l'implication \Leftarrow du lemme 1.1, $\rho * h_\omega = \rho(1)h_\omega$.

On pose alors, pour toute forme positive ω , $K_\omega = \{h \text{ état} \mid \omega * h = \omega(1)h\}$. Ce qui précède montre que K_ω est non vide et que $\rho \leq \omega \Rightarrow K_\omega \subset K_\rho$. De plus il est clair que les K_ω sont préfaiblement compacts. Leur intersection contient donc au moins un état h , il est invariant à gauche. De même, il existe un état h' invariant à droite. Ils sont égaux : $h = h' * h = h'$, ce qui montre également l'unicité de la mesure de Haar ainsi obtenue.

La deuxième égalité se déduit sans difficulté, grâce à (5), de l'invariance à gauche et à droite sur les formes. Elle implique, toujours grâce à (5), la première. Pour la troisième on pose $\hat{h} = h \circ \kappa$, $\check{h} = h \circ \kappa^{-1}$ (ce sont des formes sur \mathcal{A}), et on calcule (pour $a \in \mathcal{A}$) :

$$h * \check{h}(\kappa(a)) = (h \otimes \check{h}) \circ \Phi \circ \kappa(a) = (\check{h} \otimes h) \circ (\kappa \otimes \kappa) \circ \Phi(a) = h * \hat{h}(a).$$

Mais d'autre part la première égalité assure que $h * \check{h}(\kappa(a)) = h(\kappa(a))$ et $h * \hat{h}(a) = h(a)$, ce qui donne le résultat recherché. //

B) Théorie des représentations

On établit maintenant les résultats fondamentaux de la théorie des représentations, qui nous seront utiles en C) pour l'obtention d'une dualité pour les groupes quantiques compacts matriciels, et pour l'étude d'une déformation du groupe «classique» $SU(N)$. Ils proviennent essentiellement de [45] et [27].

1) Entrelacement et contragrédience

Pour une étude plus détaillée des représentations d'un groupe quantique compact matriciel, on introduit maintenant les notions d'entrelacement et de contragrédience. L'objectif est le théorème de décomposition d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles. Les notions de somme directe, inclusion, irréductibilité peuvent s'exprimer dans le langage des opérateurs d'entrelacement.

Définition 7 Soit v, w des représentations du groupe quantique compact matriciel (A, u) sur E et F respectivement. On dit que $s \in L(E, F)$ **entrelace**, ou est un **morphisme d'entrelacement** entre, v et w si $(s \otimes 1)v = w(s \otimes 1)$. L'ensemble des morphismes d'entrelacement entre v et w est noté $\text{Mor}(v, w)$. Si un morphisme inversible entrelace v et w , on dit que ces représentations sont **équivalentes**.

Notons, pour j un antiisomorphisme entre un espace de Hilbert E et un espace vectoriel de dimension finie $F : t_j(1) = \sum e_i \otimes j(e_i)$ (où (e_i) est une bon quelconque de E) et $\bar{t}_j(y \otimes x) = (j^{-1}(y)|x)$. Cela définit $t_j : \mathbb{C} \rightarrow E \otimes F$ et $\bar{t}_j : F \otimes E \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposition 7 Soit v_1, v_2, v, w des représentations d'un groupe quantique compact matriciel d'espaces respectifs E_1, E_2, E et F . S'il existe $s_1 \in \text{Mor}(v_1, w)$ et $s_2 \in \text{Mor}(v_2, w)$ injectifs tels que $\text{Im}(s_1) \oplus \text{Im}(s_2) = F$, alors w est équivalente à $v_1 \oplus v_2$. S'il existe $p \in \text{Mor}(v, v)$ projection de E sur F telle que $p|_F \in \text{Mor}(v, w)$, w est une sous-représentation de v . Si v est irréductible, $\text{Mor}(v, v) = \mathbb{C}\text{Id}$. Supposons maintenant E muni d'une structure hermitienne rendant v unitaire. w est équivalente à \bar{v} ssi il existe un antiisomorphisme j entre E et F tel que $t_j \in \text{Mor}(1, v \oplus w)$ et $\bar{t}_j \in \text{Mor}(w \oplus v, 1)$.

// La première affirmation découle immédiatement du fait que le noyau d'un morphisme d'entrelacement est un sous-espace invariant, qui provient lui-même de l'égalité évidente : $\hat{w} \circ s = s \otimes \text{Id} \circ \hat{v}$ pour $s \in \text{Mor}(v, w)$. Ce même fait assure que si une projection commute à v , son image est stable. De même, lorsque v est irréductible, $\text{Mor}(v, v) = \mathbb{C}\text{Id}$ car les sous-espaces propres de ses éléments sont nuls ou pleins. D'autre part, w est équivalente à \bar{v} ssi il existe $j \in \overline{GL}(E, F)$ telle que $w^{j \otimes \text{Id}} = v^{\text{Id} \otimes *}$, où on note $m^j = j^{-1} m j \in L(E)$ pour $m \in L(F)$. Posant $\tilde{w} = \sum w_i^{j*} \otimes b_i$ si $w = \sum w_i \otimes b_i$, cela équivaut à $\tilde{w} = v^* = v^{-1}$. Le résultat est donc assuré par les équivalences $t_j \in \text{Mor}(1, v \oplus w) \Leftrightarrow v \tilde{w} = \text{Id} \otimes 1$ et $\bar{t}_j \in \text{Mor}(v \oplus w, 1) \Leftrightarrow \tilde{w} v = \text{Id} \otimes 1$. Vérifions par exemple la première, en posant $v = \sum v_i \otimes a_i$ et par des manipulation élémentaires des produits scalaires et tensoriels : par définition de t_j , $(v \oplus w)(t_j \otimes 1) = t_j \otimes 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall \zeta \in E \quad & \sum v_k(e_i) \otimes (w_l \circ j)(e_i) \otimes a_k b_l = \sum e_i \otimes j(e_i) \otimes 1 \\ \Leftrightarrow \forall \zeta \in E \quad & \sum (j(\zeta)|w_l \circ j(e_i)) v_k(e_i) \otimes a_k b_l = \sum (j(\zeta)|j(e_i)) e_i \otimes 1 \\ \Leftrightarrow \forall \zeta \in E \quad & \sum (e_i|w_l^{j*}(\zeta)) v_k(e_i) \otimes a_k b_l = \sum (e_i|\zeta) e_i \otimes 1 \\ \Leftrightarrow \forall \zeta \in E \quad & \sum (v_k \circ w_l^{j*})(\zeta) \otimes a_k b_l = \zeta \otimes 1, \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que $v \tilde{w} = \text{Id} \otimes 1$. La structure hermitienne de F utilisée à la deuxième ligne est celle qui rend j unitaire. //

REMARQUE. On verra au lemme 2.2 que si v est inversible, on peut toujours munir E d'une structure hermitienne rendant v unitaire. D'autre part les implications de l'énoncé sont en fait des équivalences : cela résulte immédiatement du théorème 2 (paragraphe suivant). Enfin la démonstration montre également que si $t_j \in \text{Mor}(1, v \oplus w)$, $\bar{t}_j \in \text{Mor}(v \oplus w, 1)$ et $\tilde{w} = v^*$, alors v est unitaire — on utilisera ce résultat en C).

Le langage des morphismes d'entrelacement s'exprime à son tour simplement en termes de contragrédience, invariance et produit tensoriel. Notons

$$v \oplus w = \sum v_i \otimes w_j \otimes a_i b_j \quad \text{et}$$

$${}^c v = \sum {}^t v_i \otimes \kappa(a_i),$$

pour $v = \sum v_i \otimes b_i \in L(E) \otimes A$ puis $L(E) \otimes A$, et $w = \sum w_i \otimes b_i \in L(E) \otimes A$.

Définition 8 Soit v, w des représentations d'un groupe quantique compact matriciel. $v \oplus w$ et, si v est lisse, ${}^c v$, sont des représentations de ce même groupe quantique, dites **produit tensoriel** de v et w et **contragrédiente** de v .

Définition 9 Soit v une représentation d'un groupe quantique compact matriciel. On dit que $x \in E$ est **invariant** sous v si $\hat{v}(x) = x \otimes 1$, ou encore : $x \in \text{Mor}(1, v)$ (où on identifie x à une application de $L(\mathbb{C}, E)$). On dit que $\varphi \in E^*$ est **invariante** sous v si $(\varphi \otimes \text{Id}) \circ \hat{v} = \varphi \otimes 1$, ou encore : $\varphi \in \text{Mor}(v, 1)$.

Proposition 8 Soit v, w des représentations non dégénérées et lisses d'un groupe quantique compact matriciel (A, u) , sur E et F respectivement. Soit $s \in L(E, F)$, qu'on identifie à un élément de $F \otimes E^*$ puis de $(E \otimes F^*)^*$. Alors $s \in \text{Mor}(v, w)$ **ssi** s est invariant sous $w \oplus {}^c v$. De manière analogue : $s \in \text{Mor}(v, {}^c w)$ **ssi** s est une forme sur $E \otimes F^*$ invariante sous $v \oplus {}^c w$.

// Montrons par exemple la deuxième équivalence. On utilise le fait (évident) que $s \in L(E, F) \simeq (E \otimes F^*)^*$ est une forme invariante sous $v \oplus {}^c w$ **ssi** ${}^t(v \oplus {}^c w)_\omega(s) = \omega(1)s$ pour toute $\omega \in \mathcal{A}^*$. Si on pose $v = \sum v_i \otimes a_i$ et $w = \sum w_j \otimes b_j$, cela s'écrit

$$\sum \omega(a_i \kappa(b_j)) {}^t(v_i \otimes {}^t w_j)(s) = \omega(1)s. \quad (16)$$

Mais ${}^t(v_i \otimes {}^t w_j)(s) = (w_j \otimes {}^t v_i)(\sum \zeta_k \otimes \varphi_k) = \sum w_j(\zeta_k) \otimes (\varphi_k \circ v_i) = w_j \circ s \circ v_i$ (on a posé $s = \sum \zeta_k \otimes \varphi_k$ dans l'identification $L(E, F) \simeq F \otimes E^*$). (16) est ainsi équivalente, après simplification de ω , à

$$\sum (w_j s v_i) \otimes (a_i \kappa(b_j)) = s \otimes 1, \quad \text{où on reconnaît}$$

$$({}^t \text{Id}_v)({}^t s \otimes 1)({}^c w) = {}^t s \otimes 1 \quad (17)$$

grâce à une application de ${}^t \otimes \text{Id}$. Or ${}^c w$ est non dégénérée et lisse comme w , donc inversible, et la démonstration de la proposition 4 donne son inverse : $\text{Id} \otimes \kappa({}^c w) = {}^t \otimes \text{Id}({}^c w)$. Ainsi (17) se réécrit, par une nouvelle application de ${}^t \otimes \text{Id} : (s \otimes 1)v = {}^c w(s \otimes 1)$. On a bien l'équivalence recherchée. //

2) Décomposition

Les reformulations du paragraphe précédent, alliées à l'utilisation de la mesure de Haar, sont la base du théorème de décomposition que nous démontrons maintenant.

Lemme 2.1 Soit v une représentation d'un groupe quantique compact matriciel (A, u) , h la mesure de Haar sur (A, u) . v_h est la projection sur l'espace des éléments invariants sous v dont la transposée est la projection sur l'espace des formes invariantes sous v . Pour ζ invariant sous v il existe une forme φ invariante sous v telle que $\varphi(\zeta) > 0$.

// On a $v_h \circ v_\omega = v_{h * \omega} = \omega(1)v_h = v_\omega \circ v_h$ pour toute $\omega \in A'$ (cf. le début de la démonstration de la proposition 4). En particulier v_h est bien une projection. De plus si $v_h(\zeta) = \zeta$ on a pour $\omega \in A'$ quelconque $v_\omega(\zeta) = v_\omega \circ v_h(\zeta) = \omega(1)v_h(\zeta) = \omega(1)\zeta$, donc ζ est invariant. De même si ${}^t v_h(\varphi) = \varphi$ on a pour $\omega \in A'$ quelconque $\varphi \circ v_\omega = \omega(1)\varphi$ donc φ est invariante. Les réciproques étant triviales, $\text{Im } v_h$ (resp. $\text{Im } {}^t v_h$) est bien l'espace des éléments (resp. des formes) invariant(e)s.

Soit ζ un vecteur invariant sous v , et φ_0 une forme quelconque telle que $\varphi_0(\zeta) > 0$. Alors $\varphi = {}^t v_h(\varphi_0)$ convient. En effet elle est invariante d'après ce qui précède, et on a (ζ étant invariant) : $\varphi(\zeta) = \varphi_0 \circ v_h(\zeta) = \varphi_0(\zeta) > 0$. //

Lemme 2.2 Soit v une représentation d'un groupe quantique compact matriciel $G = (A, u)$ sur un espace vectoriel E . Si v est inversible, il existe une structure hermitienne sur E qui rend v unitaire.

// Munissons E d'une structure hermitienne quelconque. Dans le cas commutatif la structure hermitienne invariante sous v est obtenue en «moyennant» la première par h : on pose

$$(\zeta|\zeta')_G = \int_G (v(g)\zeta|v(g)\zeta') dh(g) = \int_G (\zeta|v(g)^*v(g)\zeta) dg.$$

Dans notre cas on pose de même $Q = \text{Id} \otimes h(v^*v)$ puis $(\zeta|\zeta')_G = (\zeta|Q\zeta')$. C'est un produit scalaire car, v étant inversible dans la C^* -algèbre $L(E) \otimes A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $v^*v \geq \varepsilon(\text{Id} \otimes 1)$, ce qui donne $Q \geq \varepsilon \text{Id}$. Il rend v unitaire car h est la mesure de Haar :

$$\begin{aligned} \text{Id} \otimes (h \otimes \text{Id} \circ \Phi)(v^*v) &= (\text{Id} \otimes h(v^*v)) \otimes 1, \quad \text{d'où} \\ Q \otimes 1 &= \text{Id} \otimes h \otimes \text{Id}((v \oplus v)^*(v \oplus v)) \\ &= v^*(\text{Id} \otimes h \otimes \text{Id}(v^*v \otimes 1))v = v^*(Q \otimes 1)v, \end{aligned}$$

et l'adjoint d'un endomorphisme s relativement à $(\cdot|\cdot)_G$ est bien $Q^{-1}s^*Q : (s\zeta|Q\zeta') = (\zeta|s^*Q\zeta') = (\zeta|Q(Q^{-1}s^*Q)\zeta')$. //

Théorème 2 Soit $G = (A, u)$ un groupe quantique compact matriciel. Toute représentation unitaire ou lisse de G est somme directe de représentations irréductibles de $\text{Rep}_0(G)$ et de représentations nulles.

// On se ramène au cas unitaire grâce à la proposition 4, puis au lemme 2.2 appliqué à la composante non dégénérée de la représentation. Comme dans le cas classique, le point central de la démonstration est la stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Cependant on ne peut la démontrer a priori dans notre cadre que lorsque la sous-représentation associée est inversible, et il nous faudra montrer ensuite qu'une représentation unitaire ne peut avoir de sous-représentation non inversible de dimension non nulle (ce qui est évident dans le cas classique).

Soit $v \in L(E)$ une représentation unitaire d'un groupe quantique compact matriciel (A, u) , et F un sous-espace stable de v . Soit w la sous-représentation associée et $P \in L(E)$ la projection orthogonale sur F . Identifions w à un élément de $L(E)$ par $w = v(P \otimes 1)$. On a alors $w^* = (P \otimes 1)v^*$ et $w^*w = (P \otimes 1)v^*v(P \otimes 1) = P \otimes 1$. En revenant aux éléments de $L(F)$ on a donc $w^*w = \text{Id}_F$. Ce n'est pas vrai a priori dans l'autre sens car on ne peut identifier w^* à $v^*(P \otimes 1) : v^*$ ne stabilise pas a priori F . Mais si on suppose w inversible alors cela suffit à assurer son unitarité, et en particulier l'égalité $ww^* = \text{Id}_F$, c'est-à-dire dans $L(E) : v(P \otimes 1)v^* = (P \otimes 1)$. Ainsi P est dans $\text{Mor}(v, v)$ et $\text{Mor}(v^*, v^*)$, donc son image, F , et son noyau, F^\perp , sont stables sous v et v^* .

Par une récurrence immédiate, il s'ensuit que v est somme directe de représentations irréductibles de $\text{Rep}_0(G)$ et d'une représentation unitaire v_0 d'espace F telle que $\forall w \in \text{Rep}_0(G) \text{ Mor}(w, v_0) = \{0\}$. Cela signifie, par la proposition 8, que $v_0 \oplus^c w$ n'a pas d'autre élément invariant que 0, pour toute $w \in \text{Rep}_0(G)$, et donc par le lemme 2.1 : $\forall w \in \text{Rep}_0(G) (v_0 \oplus^c w)_h = 0$. Écrivons alors $v_0 = \sum v_i^0 \otimes a_i$ avec (v_i^0) libre, on a

$$\forall w \in \text{Rep}_0(G) \quad \forall \lambda \in L(E_w^*)^* \quad \text{Id} \otimes \lambda \otimes h(v_0 \oplus^c w) = \sum h(a_i \lambda w) v_i^0 = 0,$$

donc par liberté et d'après la proposition 5 : $\forall i \quad \forall a \in A \quad h(a_i a) = 0$ (en effet $\sum \lambda w = \kappa(\lambda' w)$ avec $\lambda' = \lambda \circ \iota$, et κ est bijective). Alors $\text{Id}_F = \text{Id}_F \otimes h(v_0 v_0^*) = \sum h(a_i a_j^*) v_i^0 v_j^{0*} = 0$, ce qui n'est possible que si $F = \{0\}$. //

Corollaire 2.1 L'ensemble des représentations inversibles (ou unitaires) est $\text{Rep}_0(G)$. L'ensemble des représentations lisses est l'ensemble des sommes de représentations de $\text{Rep}_0(G)$ et de représentations nulles.

// En effet par le lemme 2.2 une représentation inversible est unitaire à un choix de structure hermitienne près, donc se décompose grâce au théorème dans $\text{Rep}_0(G)$, qui est stable par somme directe. De plus u est inversible donc les représentations de $\text{Rep}_0(G)$ aussi. La deuxième assertion est immédiate grâce à la proposition 4. //

REMARQUE. Dans [31], Woronowicz et Podleś exhibent une représentation unitaire non lisse du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ quantique, qui n'est pas compact. On peut se demander s'il existe des représentations non lisses de dimension finie dans le cas des groupes quantiques compacts. La question est en fait de savoir si la proposition 4 peut être mise en défaut pour une représentation non lisse : une telle représentation est soit non dégénérée mais non inversible, soit dégénérée mais avec un noyau sans supplémentaire stable.

Corollaire 2.2 *Tout groupe quantique compact cocommutatif est semblable à un groupe quantique $(C^*(U_\Gamma), u_\Gamma)$ avec Γ un groupe discret à un nombre fini de générateurs, et U_Γ une représentation fidèle de Γ telle que $U_\Gamma \otimes U_\Gamma$ soit contenue dans un multiple de U_Γ .*

// Soit v une représentation irréductible de (A, u) sur E . La cocommutativité de Φ entraîne la commutativité du produit de convolution des formes : $(\omega \otimes \omega') \circ \Phi = (\omega' \otimes \omega) \circ \Phi$, et donc $\forall \omega, \omega' \in A' \quad v_\omega \circ v_{\omega'} = v_{\omega'} \circ v_\omega$ (cf. démonstration de la proposition 4). Cela entraîne immédiatement, pour $\omega \in A'$, l'invariance sous v des sous-espaces propres de v_ω , et par irréductibilité v_ω est un multiple de l'identité. En particulier toute droite de E est stable sous v , l'irréductibilité impose donc $\dim E = 1$. Par le théorème, u est somme directe de représentations irréductibles, qui sont de dimension 1 : $u = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ avec $\gamma_i \in A$, à une similitude près. Par définition de Φ , les γ_i et les $\gamma_i^{-1} = \kappa(\gamma_i)$ sont des éléments $a \in A$ tels que $\Phi(a) = a \otimes a$, donc vérifient $\|a\| \leq 1$ (en effet $\|\Phi\| \leq 1$). En conséquence, dans un plongement dans un $L(H)$ quelconque, les γ_i sont isométriques, donc unitaires. Soit alors Γ le sous-groupe de $U(A)$ engendré par les γ_i .

La restriction U_Γ de la représentation universelle π de A à Γ est une représentation fidèle de Γ , telle que $U_\Gamma \otimes U_\Gamma$ est contenue dans un multiple de U_Γ . De plus on a $C^*(U_\Gamma) = \pi(A)$ car les γ_i engendrent A . Donc π établit la similarité de (A, u) et $(C^*(U_\Gamma), u_\Gamma)$: c'est le résultat recherché. //

3) Coefficients

Lemme 3.1 *Soit v et w deux représentations irréductibles d'un groupe quantique compact matriciel. Si $v \simeq w$, alors $\text{Mor}(v, w) = \mathbb{C}s$. Si $v \not\simeq w$, alors $\text{Mor}(v, w) = \{0\}$. En particulier, un morphisme d'entrelacement entre deux représentations irréductibles est soit nul, soit inversible.*

// On a déjà établi la première affirmation à la proposition 7, dans le cas $v = w$, auquel on se ramène en considérant $(s^{-1} \otimes \text{Id})w(s \otimes \text{Id})$. Si v et w sont irréductibles et non équivalentes, on a $\text{Mor}(v, w) = \{0\}$ car le noyau et l'image d'un morphisme d'entrelacement — qui ne peut être inversible — sont stables. //

Pour $G = (A, u)$ groupe quantique compact matriciel on note \hat{G} l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de $\text{Rep}_0(G)$, et $(u^\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ un système de représentants de \hat{G} . Soit (E_α) les espaces correspondant, on peut supposer d'après le lemme 2.2 qu'ils sont munis d'une structure hermitienne telle que les u^α soient unitaires. On se donne pour chaque α une base hermitienne (e_k^α) de E_α et on note (e_{kl}^α) la base associée de $L(E_\alpha)$: $e_{kl}^\alpha(e_i^\alpha) = \delta_{ik}e_l^\alpha$. Alors $u^\alpha = \sum e_{kl}^\alpha \otimes_{kl} u^\alpha$. On suppose de plus que les bases de E_α et $E_{\bar{\alpha}} = \bar{E}_\alpha$ sont les mêmes.

Théorème 3 *Soit $G = (A, u)$ un groupe quantique compact matriciel et h sa mesure de Haar. Pour chaque $\alpha \in \hat{G}$ il existe $F_\alpha \in L(E_\alpha)$ défini-positif tel que $\text{Mor}(u^\alpha, {}^c c u^\alpha) = \mathbb{C} F_\alpha$. Il est unique à une constante strictement positive près. La famille $({}_{kl} u^\alpha)_{\alpha, kl}$ est une base de \mathcal{A} vérifiant les relations d'orthogonalité :*

$$h({}_{km} u^\alpha {}_{ln} u^{\beta*}) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \frac{\text{Tr}(F_\alpha e_{lk}^\alpha)}{\text{Tr} F_\alpha}, \quad (18)$$

$$h({}_{mk} u^{\alpha*} {}_{nl} u^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \frac{\text{Tr}(F_\alpha^{-1} e_{lk}^\alpha)}{\text{Tr} F_\alpha^{-1}}. \quad (19)$$

On a enfin $\Phi({}_{kl} u^\alpha) = \sum {}_{rl} u^\alpha \otimes {}_{kr} u^\alpha$, $\kappa({}_{kl} u^\alpha) = {}_{lk} u^{\alpha*}$, $e({}_{kl} u^\alpha) = \delta_{kl}$, et $h({}_{kl} u^\alpha) = \delta_{\alpha\hat{1}}$.

// Commençons par les dernières assertions. L'expression de Φ sur les ${}_{kl} u^\alpha$ exprime exactement le fait que les u^α sont des représentations. En appliquant alors (4) à ce premier résultat, il vient : $\text{Id} \otimes \kappa(u^\alpha) = u^{\alpha-1} = u^{\alpha*}$, ce qui est l'expression recherchée pour κ . Remarquons que cela s'écrit aussi ${}^c u^\alpha = \sum {}^t e_{lk}^\alpha \otimes {}_{kl} u^{\alpha*}$. Enfin on obtient de

même $h({}_{kl}u^\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq \hat{1}$ en écrivant $(\text{Id} \otimes h) \circ \Phi = 1 \otimes h$ sur ${}_{kl}u^\alpha$ et en utilisant la liberté de $({}_{kl}u^\alpha)$ démontrée ci-dessous. Le seul élément de matrice de $u^{\hat{1}} = 1$ est 1_A , d'où le résultat lorsque $\alpha = \hat{1}$. Enfin l'expression de e se déduit immédiatement de sa définition : équation (4).

D'après la proposition 8, $\text{Id} \in L(E_\alpha) \simeq E_\alpha \otimes E_\alpha^*$ est invariant sous $u^\alpha \oplus {}^c u^\alpha$. D'après le lemme 2.1 il existe donc $\tilde{F}_\alpha \in (E_\alpha \otimes E_\alpha^*)^*$ forme invariante sous $u^\alpha \oplus {}^c u^\alpha$ telle que $\tilde{F}_\alpha(\text{Id}) > 0$. Soit F_α l'élément de $L(E_\alpha)$ correspondant à \tilde{F}_α dans l'isomorphisme $(E_\alpha \otimes E_\alpha^*)^* \simeq L(E_\alpha)$. Toujours d'après la proposition 8, l'invariance de \tilde{F}_α signifie que F_α est dans $\text{Mor}(u^\alpha, {}^c u^\alpha)$, et $\tilde{F}_\alpha(\text{Id}) > 0$ s'écrit $\text{Tr}(F_\alpha \text{Id}) > 0$. En particulier F_α est non nulle, et le lemme 3.1 montre que F_α est inversible et que $\text{Mor}(u^\alpha, {}^c u^\alpha) = \mathbb{C} F_\alpha$ (l'irréductibilité de u^α entraîne immédiatement celle de ${}^c u^\alpha$). De même $F_\alpha^{-1} \in \text{Mor}({}^c u^\alpha, u^\alpha)$ donc ${}^t F_\alpha^{-1}$ s'identifie à un élément invariant sous ${}^c u^\alpha \oplus u^\alpha$, et c'est le seul à une constante près.

D'après le lemme 2.1 et la proposition 8, $(u^\alpha \oplus {}^c u^\beta)_h$ s'identifie à la projection sur $\text{Mor}(u^\beta, u^\alpha)$ (éléments invariants sous $u^\alpha \otimes {}^c u^\beta$ de $E_\alpha \otimes E_\beta^* \simeq L(E_\beta, E_\alpha)$), dont la transposée est une projection sur $\text{Mor}(u^\alpha, {}^c u^\beta)$ (formes invariantes sous $u^\alpha \otimes {}^c u^\beta$). Le lemme 3.1 et la définition de F_α assurent alors que c'est 0 si $\alpha \neq \beta$, et sinon, la projection sur $\mathbb{C} \text{Id}_{E_\alpha}$ de forme coordonnée $\tilde{F}_\alpha \in L(E_\alpha)^*$. On a donc l'expression (avec un léger abus de notation quand $\alpha \neq \beta$) :

$$\forall s \in L(E_\beta, E_\alpha) \quad (u^\alpha \oplus {}^c u^\beta)_h(s) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\langle \tilde{F}_\alpha, s \rangle}{\langle \tilde{F}_\alpha, \text{Id} \rangle} \text{Id} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{Tr}(F_\alpha s)}{\text{Tr} F_\alpha} \text{Id}. \quad (20)$$

De même en considérant $({}^c u^\alpha \oplus u^\beta)_h$ (projection sur la droite invariante $\mathbb{C} {}^t F_\alpha^{-1}$, cf. plus haut, et de forme coordonnée $\text{Id}_{E_\alpha} \in L(E_\alpha)^*$, lorsque $\alpha = \beta$), on obtient l'égalité :

$$\forall t \in L(E_\beta^*, E_\alpha^*) \quad ({}^c u^\alpha \oplus u^\beta)_h(t) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{Tr} t}{\text{Tr} {}^t F_\alpha^{-1}} {}^t F_\alpha^{-1}. \quad (21)$$

(20) et (21) contiennent essentiellement (18) et (19). Prenons par exemple, lorsque $\alpha = \beta$, $t = {}^t e_{mn}^\alpha$ pour les secondes (pour les premières il faudrait prendre $s = e_{kl}^\alpha$). On a dans l'identification $L(E_\alpha^*) \otimes L(E_\alpha) \simeq L(E_\alpha^* \otimes E_\alpha) \simeq L(L(E_\alpha^*))$:

$$\begin{aligned} {}^t e_{ik}^\alpha \otimes e_{k'l'}^\alpha ({}^t e_{mn}^\alpha) &= {}^t e_{ik}^\alpha \otimes e_{k'l'}^\alpha (e_m^{\alpha*} \otimes e_n^\alpha) = \delta_{km} \delta_{k'n} {}^t e_{ll'}^\alpha, \quad \text{d'où} \\ ({}^c u^\alpha \oplus u^\alpha)_h ({}^t e_{mn}^\alpha) &= \sum {}^t e_{ll'}^\alpha h({}_{ml}u^{\alpha*} \quad {}_{nl}u^\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

(grâce à l'expression de ${}^c u^\alpha$ établie au premier paragraphe). Mais d'autre part le membre de droite de (21) vaut pour $t = {}^t e_{mn}^\alpha$:

$$\frac{\text{Tr} {}^t e_{mn}^\alpha {}^t F_\alpha^{-1}}{\text{Tr} {}^t F_\alpha^{-1}} = \delta_{mn} \sum {}^t e_{ll'}^\alpha \frac{\text{Tr} ({}^t F_\alpha^{-1} {}^t e_{l'l}^\alpha)}{\text{Tr} {}^t F_\alpha^{-1}}. \quad (23)$$

En identifiant les coefficients de ${}^t e_{ll'}^\alpha$ dans (22) et (23), on obtient exactement (19) (la trace est invariante par transposition).

Ces relations d'orthogonalité entraînent la liberté de $({}_{kl}u^\alpha)$. En effet, si $\sum \mu_{\alpha km} {}_{km}u^\alpha = 0$, (18) donne pour tout $\beta \in \hat{G}$ et tous n, l (les sommes ne portent plus que sur k) :

$$\begin{aligned} \sum \mu_{\beta kn} \text{Tr}(F_\alpha e_{lk}^\alpha) &= \text{Tr} \left(\sum \mu_{\beta kn} F_\alpha e_{lk}^\alpha \right) \\ &= e_l^{\alpha*} \circ F_\alpha \left(\sum \mu_{\beta kn} e_k^\alpha \right) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne bien, F_α étant inversible, $\forall \beta, k, n \quad \mu_{\beta kn} = 0$. D'autre part la proposition 5 affirme exactement que $({}_{kl}u^\alpha)$ est génératrice.

Pour tout $s \in L(E_\alpha)$ positif on a, par des calculs analogues à ceux de la démonstration de la proposition 8 : $(u^\alpha \oplus {}^c u^\alpha)_h(s) = \text{Id} \otimes h(u^\alpha(s \otimes 1)u^{\alpha*}) > 0$. Comme $\text{Tr}(F_\alpha) > 0$ par définition, cela entraîne pour $s = p_\zeta$ (projection orthogonale sur $\mathbb{C}\zeta \subset E_\alpha$) : $\text{Tr}(F_\alpha p_\zeta) = (\zeta | F_\alpha \zeta) > 0$. ζ étant quelconque, F_α est donc bien définie-positive. L'unicité à une constante strictement positive près est évidente. //

On voit en particulier grâce à ce théorème que la structure de groupe quantique s'exprime de manière extrêmement simple en fonction des opérations de somme directe, produit tensoriel et

conjugaison sur les représentations : on a ${}_{kl}u^\alpha {}_{mn}u^\beta = {}_{km,ln}(u^\alpha \oplus u^\beta)$, ${}_{kl}u^\alpha + {}_{mn}u^\beta = {}_{kl \oplus mn}(u^\alpha \oplus u^\beta)$, ${}_{kl}u^{\alpha*} = {}_{kl}\bar{u}^\alpha$, $\Phi({}_{kl}u^\alpha) = \sum_r {}_r l u^\alpha \otimes {}_k r u^\alpha$, $\kappa({}_{kl}u^\alpha) = {}_{lk}u^{\alpha*}$, $e({}_{kl}u^\alpha) = \delta_{kl}$ et $h({}_{kl}u^\alpha) = \delta_{\alpha\hat{1}}$. On peut donc espérer reconstruire le groupe quantique à partir de ses représentations, ce sera l'objet du paragraphe C)2) de la troisième partie.

Corollaire 3.1 *Soit v une représentation lisse d'un groupe quantique compact matriciel. ${}^c v$ est équivalente à \bar{v} , et ${}^{cc}v$, à v .*

// L'expression du théorème pour κ entraîne immédiatement, comme on l'a vu dans la démonstration : ${}^c u^\alpha = \sum {}^t e_{lk}^\alpha \otimes {}_{kl}u^{\alpha*}$, et ${}^t e_{lk}^\alpha$ est le vecteur en position (k, l) dans la base de $L(E_\alpha^*)$ associée à $(e_k^{\alpha*})$. D'autre part on a par définition $\bar{u}^\alpha = \sum \bar{e}_{kl}^\alpha \otimes {}_{kl}u^{\alpha*}$. L'équivalence entre ${}^c u^\alpha$ et \bar{u}^α est évidente sur ces expressions, elle s'étend à une représentation lisse v quelconque grâce au théorème de décomposition 2. On a alors ${}^{cc}v \sim \bar{v} \sim v$, d'où la seconde assertion (qui résulte aussi de l'existence de F_α). //

Le corollaire suivant est en fait une simplification des axiomes de la définition 1, établie pour la première fois dans [49]. On l'a utilisé pour introduire les exemples de A)3).

Corollaire 3.2 *Soit A une C^* -algèbre et $u \in M_n(A)$ dont les éléments de matrice engendrent la C^* -algèbre A . Si u et \bar{u} sont inversibles et s'il existe un morphisme unifié de C^* -algèbres $\Phi : A \rightarrow A \otimes A$ tel que $\text{Id} \otimes \Phi(u) = u \oplus u$, alors (A, u) est un groupe quantique compact matriciel.*

// Montrons d'abord que sous ces hypothèses, (A, Φ) est encore un groupe compact, c'est-à-dire que $1 \otimes A \Phi(A)$ et $A \otimes 1 \Phi(A)$ sont denses dans $A \otimes A$ (la vérification de la coassociativité, sur les éléments de matrice de u , est facile). Soit $B = (A \otimes 1) \cap (\Phi(A) 1 \otimes A)$. B est une sous-algèbre de $A \otimes A$: si $a \otimes 1 = \sum \Phi(a'_i)(1 \otimes a''_i) \in B$ et $b \otimes 1 = \sum \Phi(b'_j)(1 \otimes b''_j) \in B$, alors

$$ab \otimes 1 = \sum \Phi(a'_i)(b \otimes 1)(1 \otimes a''_i) = \sum \Phi(a'_i b'_j)(a \otimes b''_j a''_i) \in B.$$

Or on a, pour tous i et j :

$$\sum \Phi({}_{ik}u)(1 \otimes {}_{kj}u^{-1}) = \sum {}_{il}u \otimes ({}_{lk}u {}_{kj}u^{-1}) = {}_{ij}u \otimes 1 \in B,$$

et de même, en utilisant l'inversibilité de \bar{u} , ${}_{ij}u^* \in B$. On a donc $\mathcal{A} \otimes 1 \subset B$. Cela implique bien sûr $\mathcal{A} \otimes A \subset \Phi(A) 1 \otimes A$, et par passage à l'adjoint, la densité de $1 \otimes A \Phi(A)$ dans $A \otimes A$. On vérifie de la même manière celle de $A \otimes 1 \Phi(A)$.

Le lecteur peut maintenant vérifier que les résultats obtenus dans cette section concernant les représentations unitaires n'utilisent rien d'autre que la coassociativité de Φ , la densité de \mathcal{A} dans A , l'inversibilité de u et \bar{u} , et la densité de $1 \otimes A \Phi(A)$ et $A \otimes 1 \Phi(A)$ dans $A \otimes A$ (pour l'existence de la mesure de Haar). En particulier on n'a utilisé l'existence de κ que pour les propositions 1 et 4, qui sont inutiles lorsqu'on considère des représentations inversibles, et, à travers la non dégénérescence des représentations de $\text{Rep}_0(G)$, pour démontrer la densité de $1 \otimes A \Phi(A)$ et $A \otimes 1 \Phi(A)$ dans $A \otimes A$, que l'on vient d'établir indépendamment. Le théorème 3 est en particulier valable sous nos hypothèses (sauf bien sûr l'expression de κ), et on peut définir un coinverse dans la base des coefficients : $\kappa({}_{kl}u^\alpha) = {}_{lk}u^{\alpha*}$. Il est immédiat de vérifier (2) et (3), donc (A, u) est bien un groupe quantique compact matriciel. //

Corollaire 3.3 *Soit $G = (A, u)$ un groupe quantique compact matriciel. La mesure de Haar h sur G est fidèle sur \mathcal{A} .*

// Soit $a \in \mathcal{A}_+$ tel que $h(a) = 0$. On étend cette propriété à d'autres éléments : pour tout état ω , $a * \omega$ est positif et $h(a * \omega) = h * \omega(a) = h(a) = 0$. On passe à l'idéal à gauche $J = \{a \in A \mid h(a * a) = 0\}$: les $(a * \omega)^{\frac{1}{2}}$ sont dans J . Notant (ω_{kl}^α) les formes coordonnées de la base $({}_{kl}u^\alpha)$, et $a = \sum a_{kl}^\alpha {}_{kl}u^\alpha$, on a donc $\sum_s \kappa(a_{ks}^\alpha)(a * \omega_{ls}^\alpha) \in J$, qui donne en développant a et en utilisant l'expression de κ dans la base $({}_{kl}u^\alpha)$: $\forall k, l, \alpha \ a_{kl}^\alpha 1 \in J$. Mais h est non nulle ($h(1) = 1$), donc $J \subsetneq A$ et $\forall k, l, \alpha \ a_{kl}^\alpha = 0$. Ainsi $a = 0$. //

REMARQUE. h n'est pas en général fidèle sur A entier (cf. [27]). En quotientant puis complétant A pour la quasi-norme associée à h on obtient donc une autre C^* -algèbre A_r , contenant encore \mathcal{A} comme sous-algèbre dense, grâce au corollaire. Alors (A_r, u) devient un groupe quantique compact

matriciel dont la sous-algèbre dense a la même structure d'algèbre de Hopf que celle de (A, u) . Il est naturel de penser à ces objets comme à différentes «versions» du même groupe quantique compact matriciel — on a en fait une version par C^* -norme sur \mathcal{A} rendant Φ continue.

4) Compléments

On peut à partir des théorèmes 2 et 3 développer une théorie des représentations en tous points analogue à celle des groupes classiques, de manière tout-à-fait élémentaire. Par exemple, notant $\chi_v = \text{Tr } v$ le caractère d'une représentation v , et χ^α celui de u^α (grâce à l'invariance sous l'équivalence), on la proposition suivante, dont l'énoncé et la démonstration proviennent mot-à-mot de [38] (propositions 2.2 et 2.3, chapitre II) :

Proposition 9 *Soit v et w deux représentation unitaires irréductibles d'un groupe quantique compact matriciel G . Les produits scalaires de leurs caractères dans $L^2(G, h)$ sont donnés par : $h(\chi_v^* \chi_w) = \delta_{v \sim w}$. Une représentation unitaire v de G est irréductible **ssi** $h(\chi_v^* \chi_v) = 1$. Deux représentations unitaires v et w de G sont équivalentes **ssi** $\chi_v = \chi_w$.*

/// Par les relations d'orthogonalité pour les éléments de matrice (théorème 3), nous avons $h(\chi_v^* \chi_w) = 0$ si $v \not\sim w$. Si $v \sim w$, alors nous avons $\chi_v = \chi_w$. À nouveau par les relations d'orthogonalité, nous obtenons :

$$h(\chi_v^* \chi_w) = h(\chi_v^* \chi_v) = \sum_{i,j=1}^{\dim v} h_{(ii} v^*_{jj} v) = \frac{1}{\text{Tr}(F_v)} \sum_{i,j=1}^{\dim v} \delta_{ij} \text{Tr}(F_v e_{ii}^v) = 1.$$

Les parties «seulement si» des deux assertions suivantes en découlent facilement. Inversement toute représentation unitaire v de dimension finie de G peut se décomposer comme somme directe de représentations irréductibles (théorème (2)) : soit $v = \bigoplus_1^n m_i v_i$ la décomposition irréductible de v , où nous pouvons supposer $v_i \approx v_j$ si $i \neq j$ et $m_i \geq 1$ pour tout i . Nous avons alors $\chi_v = \sum m_i \chi_{v_i}$. Les relations d'orthogonalité pour les caractères (ci-dessus) montrent que $m_i = h(\chi_v^* \chi_{v_i})$ et $h(\chi_v^* \chi_v) = \sum m_i^2$. Si χ_v satisfait $h(\chi_v^* \chi_v) = 1$, alors la seconde égalité prouve que $n = 1$, $m_1 = 1$ et $v = v_1$ est irréductible. Si $\chi_v = \chi_w$, alors nous avons $h(\chi_v^* \chi_{v_i}) = h(\chi_w^* \chi_{v_i})$ pour toute représentation irréductible v_i . La première égalité prouve que la multiplicité m_i de v_i dans v est égale à la multiplicité de v_i dans w . Nous avons prouvé que $v \sim w$. ///

Cependant la non commutativité de A a des conséquences au niveau des représentations. Nous en retiendrons deux : non commutativité du produit tensoriel et défaut de centralité de la mesure de Haar. Étant donnés deux espaces vectoriels E et F , on note sans plus de précision Σ l'unique élément de $L(E \otimes F)$ qui envoie $\zeta \otimes \zeta'$ sur $\zeta' \otimes \zeta$. Si Σ entrelace $v \oplus w$ et $w \oplus v$, on dit que les représentations v et w commutent.

Proposition 10 *Soit $(A, u) = G$ un groupe quantique compact matriciel. Les représentations de G commutent deux-à-deux **ssi** A est commutative.*

/// Si A est commutative, alors on est en présence d'un groupe classique et le résultat est évident : $\forall g \in G \quad \Sigma \circ (v(g) \otimes w(g))(\zeta \otimes \zeta') = w(g)(\zeta') \otimes v(g)(\zeta) = (w(g) \otimes v(g)) \circ \Sigma(\zeta \otimes \zeta')$. Inversement, écrivons qu'en particulier u commute à u et \bar{u} :

$$\begin{aligned} \sum (e_{rr'}^{\hat{u}} \otimes e_{ss'}^{\hat{u}}) \circ (\Sigma \otimes ({}_{rr'} u \quad {}_{ss'} u)) &= \sum (e_{rr'}^{\hat{u}} \otimes e_{ss'}^{\hat{u}}) \circ (\Sigma \otimes ({}_{ss'} u \quad {}_{rr'} u)) \quad \text{et} \\ \sum (e_{rr'}^{\hat{u}} \otimes e_{ss'}^{\hat{u}}) \circ (\Sigma \otimes ({}_{rr'} u \quad {}_{ss'} u^*)) &= \sum (e_{rr'}^{\hat{u}} \otimes e_{ss'}^{\hat{u}}) \circ (\Sigma \otimes ({}_{ss'} u^* \quad {}_{rr'} u)). \end{aligned}$$

$(e_{rr'}^{\hat{u}} \otimes e_{ss'}^{\hat{u}})$ étant une famille libre, cela montre que les ${}_{kl} u$ commutent avec eux-mêmes, et, de même, avec les ${}_{kl} u^*$. Mais ces éléments engendrent la C^* -algèbre A , qui est donc commutative. ///

Proposition 11 *Soit (A, u) un groupe quantique compact matriciel, h sa mesure de Haar. On pose dans la base du théorème 3 : $f({}_{kl} u^\alpha) = \text{Tr}(F_\alpha e_{lk}^\alpha)$. Cela définit une forme linéaire multiplicative sur \mathcal{A} , et on a :*

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad \forall b \in A \quad h(ab) = h(b f * a * f).$$

// Remarquons d'abord que les relations d'orthogonalité (18) et (19) nous renseignent déjà sur la non centralité de h : si on pose $f_{-1}(kl u^\alpha) = \text{Tr}(F_\alpha^{-1} e_{lk}^\alpha)$ on a

$$h({}_{km}u^\alpha \ {}_{ln}u^{\alpha*}) = \frac{\delta_{mn} f(kl u^\alpha)}{\text{Tr } F_\alpha} \quad \text{et}$$

$$h({}_{mk}u^{\alpha*} \ {}_{nl}u^\alpha) = \frac{\delta_{mn} f_{-1}(kl u^\alpha)}{\text{Tr } F_\alpha}.$$

Pour vérifier l'égalité de l'énoncé il suffit donc de développer a et b^* sur les $kl u^\alpha$: par définition $f * {}_{km}u^\alpha * f = \sum f({}_{kr}u^\alpha) {}_{rs}u^\alpha f({}_{sm}u^\alpha)$, et d'autre part $\sum f_{-1}({}_{mr}u^\alpha) f({}_{rn}u^\alpha) = \delta_{mn}$ (c'est l'égalité $F_\alpha F_\alpha^{-1} = \text{Id}_{E_\alpha}$). On passe à $b \in A$ quelconque par densité.

Il reste donc à établir la multiplicativité de f . On définit plus généralement $f_z(kl u^\alpha) = \text{Tr}(F_\alpha^z e_{lk}^\alpha)$: les $f_z(kl u^\alpha)$ sont les coefficients de matrice de F_α^z . On a alors

$$\forall \alpha \in \hat{G} \quad u_{f_z * f_{z'}}^\alpha = u_{f_z}^\alpha u_{f_{z'}}^\alpha = F_\alpha^z F_\alpha^{z'} = F_\alpha^{z+z'} = u_{f_{z+z'}}^\alpha, \quad \text{donc } f_z * f_{z'} = f_{z+z'}.$$

De même on a $\forall \alpha \in \hat{G} \quad u_{f_0}^\alpha = \text{Id}_{E_\alpha} = u_e^\alpha$ (car u^α est non dégénérée : cf. démonstration de la proposition 4), donc $f_0 = e$. Enfin, il est clair sur la définition que pour tout $a \in \mathcal{A}$ ($z \mapsto f_z(a)$) est à croissance exponentielle sur le demi-plan des parties réelles positives (ie $\exists \tau, M > 0 \quad \forall z \text{ Re}(z) > 0 \Rightarrow |f_z(a)| < \exp(\tau \text{Re } z)$).

Par associativité, et en appliquant l'identité du défaut de centralité de h , on obtient : $h(a f * bc * f) = h(bca) = h(ca f * b * f) = h(a f * b * f f * c * f)$. h étant fidèle, cela établit la multiplicativité de $(a \mapsto f * a * f)$, et par itération, celle des $(a \mapsto f_k * a * f_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or e est multiplicative et $e(f_k * a * f_k) = e * f_k(a * f_k) = f_k(a * f_k) = f_{2k}(a)$. Donc les f_{2k} sont multiplicatives, ie on a pour $a, b \in \mathcal{A}$: $\forall z \in 2\mathbb{N}^* \quad f_z(ab) = f_z(a) f_z(b)$. Les deux membres étant à croissance exponentielle en z , il est bien connu que l'égalité s'étend à tous les $z \in \mathbb{C}$ (théorème de Carlson, cf. [6, 9.2.1]). En particulier $f = f_1$ est multiplicative. //

REMARQUE. Dans le cas où A est de dimension finie (on parle alors de groupe quantique compact fini), ce dernier résultat montre que la mesure de Haar est en fait centrale : en effet A n'a alors qu'un nombre fini de formes multiplicatives, et la continuité des applications ($z \mapsto f_z(a)$) assure qu'elles sont constantes, égales respectivement à $f_0(a) = e(a)$, et ainsi $f = e$. Cependant ce n'est pas le cas en général : cf. [45, app. 1] pour le cas du groupe quantique $SU_\nu(2)$ introduit dans la section qui suit. On voit même sur cet exemple que la mesure de Haar n'est pas en général une trace, ce qui constitue une différence notable avec la théorie des algèbres de Kac.

C) Des représentations au groupe

On introduit maintenant la dualité de Tannaka-Krein, suivant [47], et on en déduit la construction d'une déformation des groupes $SU(N)$. On commence par analyser plus en détails l'objet $\text{Rep}_0(G)$, en utilisant le langage des catégories. Cela revient à se concentrer sur les morphismes d'entrelacement en oubliant les morphismes de la représentation elle-même, ce qui n'est pas sans rappeler la démarche générale de la géométrie non commutative.

1) Catégories monoïdales concrètes

Définition 10 Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

- de l'ensemble $\text{Obj}(\mathcal{C})$ de ses **objets**,
- pour tous $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, d'un ensemble de **morphismes** $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$,
- pour tous $c, d, e \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, de $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, e) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, e)$,
- pour tout $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, de $\text{Id}_c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$,

tels que pour tous $c, d, e, f \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $r \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$, $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, e)$, $t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(e, f)$:

- $r \circ (s \circ t) = (r \circ s) \circ t$ et
- $s \circ \text{Id}_c = \text{Id}_d \circ s = s$.

Pour introduire les opérations de somme directe, restriction, ainsi que l'équivalence et l'irréductibilité, il faut préciser la définition précédente :

Définition 11 Une catégorie concrète est la donnée

- d'une catégorie \mathcal{C} et
- pour tout $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ d'un espace de Hilbert de dimension finie H_c ,

tels que pour tous $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ est un sous-espace de $L(H_c, H_d)$,
- \circ est la composition des applications,
- Id_c est l'identité de H_c ,
- $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \implies s^* \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, c)$ et
- $H_c = H_d$ et $\text{Id}_c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \implies c = d$.

Soit $c, c', d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. S'il existe $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ unitaire, c et c' sont dits **s -équivalents** et on note $c \stackrel{s}{\sim} c'$. S'il existe $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$ projection orthogonale telle que $H_d = pH_c$ et $p|_{H_d} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$, on dit que d est un **sous-objet** de c . Si $H_d = H_c \oplus H_{c'}$ et si $i_{\text{can}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$, $i'_{\text{can}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', d)$ (avec des notations évidentes), d est appelé **somme directe** de c et c' , et noté $c \oplus c'$.

\mathcal{C} est dite **complète** si pour tous $c, c' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

- il existe un objet d'espace H s -équivalent à c pour tout isomorphisme $H_c \stackrel{s}{\simeq} H$,
- il existe un sous-objet de c d'espace pH_c pour toute $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$,
- il existe un objet somme directe de c et c' .

$c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ est dit **irréductible** si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c) = \mathbb{C}\text{Id}_c$. Dans la suite \mathcal{C}_{irr} désigne un système de représentants des objets irréductibles modulo l'équivalence. La catégorie concrète est dite **engendrée** par un ensemble $\{c_k\} \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$ si $\text{Obj}(\mathcal{C})$ est le plus petit ensemble d'objets de \mathcal{C} contenant $\{c_k\}$ et stable par équivalence, restriction et somme directe. Cela s'écrit encore $\forall c \in \mathcal{C} \exists (s_k) \in \prod_k \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c_k, c) \sum s_k s_k^* = \text{Id}_c$ (somme finie).

Enfin, le produit tensoriel donne lieu à la notion suivante :

Définition 12 Une catégorie monoïdale concrète est la donnée

- d'une catégorie concrète $(\mathcal{C}, \{H_c\})$,

- d'une loi $\text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$ notée multiplicativement et
- de $1 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$,

tels que pour $c, d, e, c', d' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

- $(cd)e = c(de)$ et $1c = c1 = c$,
- $H_{cd} = H_c \otimes H_d$,
- $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ et $s' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', d') \implies s \otimes s' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(cc', dd')$.

On a alors $H_1 = \mathbb{C}$. $\bar{c} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ est dit **conjugué** à $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ s'il existe un antiisomorphisme $j : H_c \rightarrow H_{\bar{c}}$ tel que $t_j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, r\bar{r})$ et $\bar{t}_j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{r}r, 1)$. La catégorie monoïdale concrète est dite **engendrée** par un ensemble fini $\{c_k\} \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$ si elle est engendrée en tant que catégorie concrète par l'ensemble des produits finis d'éléments de $\{c_k\}$.

Pour G groupe quantique compact matriciel, $\text{Rep}_0(G)$ muni des structures naturelles introduites dans les parties précédentes est trivialement une catégorie monoïdale concrète (le lemme 2.2 et la proposition 4 permettent de supposer les $v \in \text{Rep}_0(G)$ unitaires). De plus les notions de somme directe, restriction, équivalence, irréductibilité et conjugaison coïncident (c'est le contenu de la proposition 7), et $\text{Rep}_0(G)$ est complète. Elle est engendrée, par définition, par la paire d'objets conjugués $\{u, \bar{u}\}$. L'objet du paragraphe suivant est de montrer que cette propriété caractérise les catégories monoïdales concrètes de la forme $\text{Rep}_0(G)$ pour un certain groupe quantique compact matriciel G .

Finissons par quelques propriétés très naturelles des objets introduits plus haut (et déjà rencontrés dans le cas des représentations d'un groupe quantique compact matriciel). Les démonstrations, essentiellement des vérifications, sont laissées au lecteur, qui pourra se reporter à [47].

Proposition 12 Soit $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ une catégorie monoïdale concrète. Soit $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ admettant des objets conjugués \bar{c}, \bar{d} . Alors $\bar{c} \oplus \bar{d}$ est conjugué de $c \oplus d$. Si c' est un sous-objet de c , il admet un conjugué. Si c et d sont équivalents, \bar{c} et \bar{d} le sont aussi. \bar{c} admet un conjugué, qui est équivalent à c . Enfin, si la catégorie monoïdale concrète est engendrée par une paire d'objets conjugués, tout objet admet un conjugué.

En particulier un objet admet au plus un conjugué à équivalence près. Par abus de langage on parle dans la suite du conjugué d'un objet c (s'il existe), noté \bar{c} , et on note j_c l'antiisomorphisme entre H_c et $H_{\bar{c}}$ qui établit la conjugaison.

Proposition 13 Soit $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ une catégorie monoïdale concrète. Soit c un objet irréductible de $(\mathcal{C}, \{H_c\})$. Si $d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ est équivalent, ou conjugué, à c , alors d est irréductible. Pour $c, d \in \mathcal{C}_{\text{irr}}$ on a $: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) = \delta_{cd} \mathbb{C} \text{Id}_c$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, d\bar{c}) = \delta_{cd} \mathbb{C} t_{j_c}$. Enfin, si la catégorie concrète est complète, \mathcal{C}_{irr} l'engendre.

Cette proposition permet en particulier de supposer que \mathcal{C}_{irr} est stable par conjugaison.

2) Dualité

Soit $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ une catégorie monoïdale concrète complète. On se propose maintenant de construire un groupe quantique compact matriciel G tel que $\mathcal{C} = \text{Rep}_0(G)$. L'idée pour ce faire est de s'inspirer du théorème 3 qui donne une base privilégiée de la C^* -algèbre sous-jacente à G , indexée par les représentations irréductibles α et des bases des $L(H_\alpha)^*$.

On pose donc $\mathcal{A} = \bigoplus L(H_\alpha)^*$ où α parcourt \mathcal{C}_{irr} et on note λu^α l'élément correspondant à $\lambda \in L(H_\alpha)^*$: un élément générique de \mathcal{A} s'écrit $\sum \lambda_i u^{\alpha_i}$. Le plongement $\lambda \mapsto \lambda u^\alpha$ est linéaire donc il existe $u^\alpha \in L(H_\alpha) \otimes \mathcal{A}$ tel que $\forall \lambda \in L(H_\alpha)^* \quad \lambda u^\alpha = \lambda \otimes \text{Id}(u^\alpha)$. On pose $1 = \lambda_0 u^1$ où $\lambda_0 = (1 \mapsto 1) \in \mathbb{C}^*$.

On introduit alors les «représentations quelconques» en utilisant les morphismes de la catégorie comme morphismes d'entrelacement : il existe une unique extension $\{u^c\}_{c \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$ de $\{u^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}}}$ telle que pour tous $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et tout $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$, $(s \otimes 1)u^c = u^d(s \otimes 1)$ (où on pose pour tout $a \in \mathcal{A} : 1a = a1 = a$).

// Unicité : si d est somme directe de c et c' , alors $H_d = H_c \oplus H_{c'}$ et les injections canoniques $i : H_c \rightarrow H_d$ et $i' : H_{c'} \rightarrow H_d$ sont des morphismes de \mathcal{C} . Par hypothèse i entrelace donc u^c et u^d (resp. $i', u^{c'}, u^d$). Cela implique, d'après la proposition 7, $u^d = u^c \oplus u^{c'}$. De même si d est un sous-objet de c , u^d est la restriction de c au même sous-espace de H_c , et si c' est s -équivalent à c , $u^{c'} = (s \otimes \text{Id})u^c(s \otimes \text{Id})^{-1}$. Cela montre que si

$\{u^c\}$ et $\{u'^c\}$ sont deux extensions convenables de $\{u^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}}}$, alors l'ensemble d'objets $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid u^c = u'^c\}$ est stable par somme directe, restriction, équivalence et conjugaison. Comme il contient par définition \mathcal{C}_{irr} , c'est $\text{Obj}(\mathcal{C})$ en entier, grâce à la complétude de $(\mathcal{C}, \{H_c\})$ et à la proposition 13.

Existence : de même on définit les u^c par somme directe, restriction, conjugaison et équivalence à partir des u^α . Plus précisément, soit c un objet de \mathcal{C} , il existe d'après la définition 11 des $\alpha_k \in \mathcal{C}_{\text{irr}}$ et des $s_k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha_k, c)$ tels que $\sum s_k s_k^* = \text{Id}_c$. On pose $u^c = \sum (s_k \otimes 1) u^{\alpha_k} (s_k^* \otimes 1)$. Alors il est facile de vérifier comme plus haut que $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid \forall \alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}} \forall s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, c) \quad (s \otimes \text{Id}) u^\alpha = u^c (s \otimes \text{Id})\}$ est stable par somme directe, restriction et équivalence. Il contient les $\beta \in \mathcal{C}_{\text{irr}}$ car $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$, avec $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}}$, est multiple de l'identité si $\alpha = \beta$ et nul sinon. Donc c'est $\text{Obj}(\mathcal{C})$ en entier, ce qui signifie que $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid \forall d \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \forall s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \quad (s \otimes \text{Id}) u^c = u^d (s \otimes \text{Id})\}$ contient \mathcal{C}_{irr} , et à nouveau on en déduit que c'est tout $\text{Obj}(\mathcal{C})$. //

On introduit ensuite une multiplication sur \mathcal{A} par $\lambda u^\alpha \mu u^\beta = \lambda \otimes \mu u^{\alpha\beta}$ et on a alors $u^{rs} = u^r \oplus u^s$ pour $r, s \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Cela assure en particulier l'associativité de la multiplication, et le fait que 1 en soit l'unité.

// On a pour $\lambda \in L(H_\alpha)^*$ et $\mu \in L(H_\beta)^*$ quelconques, par définition de $\oplus : \lambda \otimes \mu \otimes \text{Id} (u^\alpha \oplus u^\beta) = (\lambda \otimes \text{Id} (u^\alpha)) (\mu \otimes \text{Id} (u^\beta)) = \lambda u^\alpha \mu u^\beta = \lambda \otimes \mu u^{\alpha\beta}$ d'où le résultat pour des objets de \mathcal{C}_{irr} . On l'étend à $\text{Obj}(\mathcal{C})$ par somme directe, restriction et équivalence comme dans la démonstration précédente. //

L'involution de \mathcal{A} est définie par $\lambda u^{\alpha*} = \lambda_{j_\alpha} u^{\bar{\alpha}}$ où on a posé $\lambda^{j_\alpha}(m) = \overline{\lambda(j_\alpha^{-1} m j_\alpha)}$. Elle est antimultiplicative et rend les u^c unitaires.

// La définition de $\bar{\alpha}$ passe aux u^c en $(u^\alpha \oplus u^{\bar{\alpha}})(t_{j_\alpha} \otimes 1) = (t_{j_\alpha} \otimes 1)$ et $(\bar{t}_{j_\alpha} \otimes 1)(u^{\bar{\alpha}} \oplus u^\alpha) = \bar{t}_{j_\alpha} \otimes 1$. Comme d'autre part, pour tout objet α irréductible $u^{\bar{\alpha}} = (u^\alpha)^{j_\alpha \otimes *}$, c'est-à-dire $\bar{u}^\alpha = u^{\alpha*}$ avec les notations de la proposition 7, la remarque suivant cette dernière assure de l'unitarité de u^α . On passe aux objets quelconques par la technique habituelle.

Pour l'antimultiplicativité on utilise l'unitarité et l'identité $u^{cd} = u^c \oplus u^d$:

$$(u^{\alpha\beta})^* = (u^\alpha \oplus u^\beta)^{-1} = \Sigma \otimes \text{Id} (u^{\alpha*} \oplus u^{\beta*})$$

d'où, si on note $\lambda^*(m) = \overline{\lambda(m^*)}$, de telle sorte que $(\lambda^* \otimes \text{Id})(u^{c*}) = (\lambda \otimes \text{Id}(u^c))^*$:

$$[\lambda \otimes \mu \otimes \text{Id}(u^{\alpha\beta})]^* = \mu^* \otimes \lambda^* \otimes \text{Id}(u^{\beta*} \oplus u^{\alpha*}),$$

c'est-à-dire $(\lambda u^\alpha \mu u^\beta)^* = \mu u^{\beta*} \lambda u^{\alpha*}$. //

On introduit enfin la mesure de Haar en posant $h(1) = 1$ et $h(\lambda u^\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq 1$ et $\lambda \in L(H_\alpha)$ quelconque. Cela définit une forme positive et fidèle sur \mathcal{A} .

// Commençons par $a = \lambda u^\alpha$. On a $h(aa^*) = \lambda \otimes \lambda^{j_\alpha} \otimes h(u^{\alpha\bar{\alpha}})$. La décomposition irréductible de $\alpha\bar{\alpha}$ induit une décomposition $\sum (s_k \otimes 1) u^{\alpha_k} (s_k^* \otimes 1)$ de $u^{\alpha\bar{\alpha}}$ dans laquelle seuls les termes tels que $\alpha_k = 1$ n'annulent pas h . Dans ce cas les s_k sont multiples de t_{j_α} (d'après la proposition 13), donc on a $\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes h(u^{\alpha\bar{\alpha}}) = c t_{j_\alpha} t_{j_\alpha}^*$ avec $c \in \mathbb{C}$. Pour déterminer c on remarque que les $s_k^* t_{j_\alpha} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, \alpha_k)$ sont nuls pour $\alpha_k \neq 1$ donc dans l'expression $t_{j_\alpha} = \sum s_k s_k^* t_{j_\alpha}$ ne subsistent que les termes tels que $\alpha_k = 1$, qui donnent $c t_{j_\alpha} t_{j_\alpha}^* t_{j_\alpha}$. Ainsi $c = (t_{j_\alpha}^* t_{j_\alpha})^{-1} > 0$. On peut alors calculer :

$$h(aa^*) = \lambda \otimes \lambda^{j_\alpha} \left(\frac{t_{j_\alpha} t_{j_\alpha}^*}{t_{j_\alpha}^* t_{j_\alpha}} \right) = \frac{\text{Tr}(j_\alpha \hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\alpha^* j_\alpha^*)}{\text{Tr}(j_\alpha j_\alpha^*)}, \quad (24)$$

où $\tilde{\lambda}_\alpha \in L(H_\alpha)$ est défini par $\lambda_\alpha = \text{Tr}(\tilde{\lambda}_\alpha \cdot)$. En effet on a, par exemple pour le dénominateur : $t_{j_\alpha}^* t_{j_\alpha}(1) = \bar{t}_{j_\alpha^{-1}}(\sum e_i \otimes j_\alpha(e_i)) = \sum (j_\alpha(e_i) | j_\alpha(e_i)) = \text{Tr}(j_\alpha j_\alpha^*)$. Il est clair sur (24) que $h(aa^*) > 0$.

Pour $a = \sum \lambda_\alpha u^\alpha$ élément quelconque non nul de \mathcal{A} , on écrit de même $h(aa^*) = \sum \lambda_\beta \otimes \lambda_\beta^{j_\alpha} \otimes h(u^{\beta\bar{\alpha}})$, et on remarque que pour $\alpha \neq \beta$ il n'y a pas de terme équivalent à 1 dans la décomposition irréductible de $\beta\bar{\alpha}$ (d'après la proposition 13), et que donc $\text{Id} \otimes h$ annule $u^{\beta\bar{\alpha}}$. Ainsi $h(aa^*) = \sum h(\lambda_\alpha u^\alpha \lambda_\alpha u^{\alpha*}) > 0$ grâce à ce qui précède. //

En particulier la C^* -algèbre enveloppante A de \mathcal{A} contient \mathcal{A} .

On suppose désormais que $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ est engendrée par une paire d'objets conjugués $\{f, \bar{f}\}$ et on pose $u = u^f \in L(H_f) \otimes A$. (A, u) possède la propriété universelle suivante : soit (B, v) une C^* -algèbre munie d'un élément $v \in L(H_f) \otimes A$, s'il existe $\{v^c\}_{c \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$ (avec $v^c \in L(H_c) \otimes B$) tel que pour tous $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

- $v^f = v$,
- v^c est unitaire,
- $v^{cd} = v^c \oplus v^d$,
- $\forall s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \quad (s \otimes 1)v^c = v^d(s \otimes 1)$,

alors il existe un morphisme de C^* -algèbres $\Psi : A \rightarrow B$ tel que $\text{Id} \otimes \Psi(u) = v$. (Remarquons que ce qui précède montre que (A, u) est un couple (B, v) convenable.)

// On pose $\Psi(\lambda u^\alpha) = \lambda v^\alpha$. On vérifie de manière standard (en considérant l'ensemble $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid \text{Id} \otimes \Psi(u^c) = v^c\}$) que pour tout objet c on a $\text{Id} \otimes \Psi(u^c) = v^c$. Cela implique en particulier que Ψ est multiplicative :

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda u^\alpha \mu u^\beta) &= \lambda \otimes \mu \otimes \Psi(u^{\alpha\beta}) = \lambda \otimes \mu \otimes \text{Id}(v^{\alpha\beta}) \\ &= \lambda \otimes \mu \otimes \text{Id}(v^\alpha \oplus v^\beta) = \lambda v^\alpha \mu v^\beta = \Psi(\lambda u^\alpha) \Psi(\mu u^\beta). \end{aligned}$$

De même Ψ est unifère ($\Psi(1) = \Psi(u^1) = v^1 = 1$), et $\text{Id} \otimes \Psi$ envoie $u = u^f$ sur $v = v^f$. Enfin la dernière hypothèse sur $\{v^c\}$ entraîne, comme plus haut grâce à la proposition 7, $v^{\bar{c}} = (v^c)^{j_c \otimes *}$, et on voit alors que Ψ est involutive : $\Psi(\lambda u^{\alpha*}) = \lambda^{j_\alpha} \otimes \Psi(u^{\bar{\alpha}}) = \lambda^{j_\alpha} \otimes \text{Id}(v^{\bar{\alpha}}) = \lambda \otimes \text{Id}(v^\alpha)^* = \Psi(\lambda u^\alpha)^*$. //

Cela s'applique en particulier à $B = A \otimes A$, $v = u \oplus u$, $v^c = u^c \oplus u^c$ (vérifications immédiates, grâce notamment à la distributivité de \oplus sur \oplus), et on obtient un morphisme de C^* -algèbres $\Phi : A \rightarrow A \otimes A$ tel que $\text{Id} \otimes \Phi(u) = u \oplus u$. Si on pose de plus $\kappa(\lambda u^\alpha) = \lambda(u^{\alpha*})$ on obtient une structure explicite de groupe quantique compact matriciel pour $G = (A, u)$.

// On vérifie comme d'habitude qu'on a en fait $\text{Id} \otimes \kappa(u^c) = u^{c*} = u^{c-1}$ pour tout objet c non nécessairement irréductible, ce qui donne en particulier (3). D'autre part on a aussi (2) grâce à :

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda u^{\alpha*}) &= \kappa(\lambda^{j_\alpha} u^{\bar{\alpha}}) = \lambda^{j_\alpha} (u^{\bar{\alpha}*}) = (\lambda^{j_\alpha} u^{\bar{\alpha}})^* = \lambda^{j_\alpha * j_\alpha} u^\alpha, \\ \text{d'où } \kappa(\kappa(\lambda u^{\alpha*})^*) &= \lambda u^\alpha \quad (\text{en effet } \lambda^{j_\alpha * j_\alpha} \lambda^{j_\alpha} = \lambda). \end{aligned}$$

Enfin κ est antimultiplicative :

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda u^\alpha \mu u^\beta) &= \lambda \otimes \mu \otimes \kappa(u^{\alpha\beta}) = \lambda \otimes \mu \otimes \text{Id}(u^{\alpha\beta-1}) \\ &= (\lambda \otimes \mu \otimes \text{Id}) \circ (\Sigma \otimes \text{Id}) (u^{\beta-1} \oplus u^{\alpha-1}) \\ &= \mu(u^{\beta-1}) \lambda(u^{\alpha-1}) = \kappa(\mu u^\beta) \kappa(\lambda u^\alpha). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que l'algèbre involutive \mathcal{A}_0 engendrée par les éléments de matrice de u est dense dans A . L'ensemble $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid u^c \in L(H_c) \otimes \mathcal{A}_0\}$ contient f par définition de \mathcal{A}_0 . Il est stable par somme directe, restriction et équivalence (cf. première démonstration de ce paragraphe). Il est stable par multiplication grâce à l'égalité $u^{cd} = u^c \oplus u^d$ et à la stabilité de $\text{Rep}_0(G)$ sous le produit tensoriel. Il est stable par conjugaison grâce à l'égalité $u^{\bar{c}} = (u^c)^{j_\alpha \otimes *} \sim \bar{u}^c$. Donc c'est $\text{Obj}(\mathcal{C})$ et on a en particulier $\lambda u^\alpha \in L(H_\alpha) \otimes \mathcal{A}_0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}}$ et tout $\lambda \in L(H_\alpha)^*$. Cela signifie que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$, et donc \mathcal{A}_0 est dense dans A . //

Enfin la catégorie monoïdale concrète $\text{Rep}_0(G)$ est égale à la catégorie $(\{u^c\}, \{H_c\}, \oplus)$ (dont les morphismes sont les morphismes de \mathcal{C}).

// Les objets sont les mêmes : pour $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ on a $\Phi(u^c) = u^c \oplus u^c$ par définition de Φ donc u^c est une représentation (unitaire) de G , et ainsi appartient à $\text{Rep}_0(G)$ (corollaire 2.1). L'inverse est vrai car $\{u, \bar{u}\}$ engendre par définition $\text{Rep}_0(G)$ et $(\mathcal{C}, \{H_c\})$

est complète.

Par définition des u^c on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \subset \text{Mor}_G(u^c, u^d)$. On montre l'inclusion inverse de la même manière que l'existence dans la première démonstration, le fait central étant que pour α et β irréductibles, u^α et u^β sont irréductibles en tant que représentations (proposition 7) donc que $\text{Mor}_G(u^\alpha, u^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \mathbb{C} \text{Id} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$ (proposition 13). On passe à des objets quelconques en considérant $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid \forall \alpha \in \mathcal{C}_{\text{irr}} \text{Mor}_G(u^\alpha, c) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, c)\}$ puis $\{c \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \mid \forall d \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \text{Mor}_G(c, d) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)\}$. //

3) Construction de groupes quantiques

Le paragraphe précédent nous permet de construire des groupes quantiques compacts matriciels à partir de catégories monoïdales concrètes complètes. Le lemme suivant est utile pour la construction de ces dernières.

Lemme 4.1 *Soit $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ une catégorie monoïdale concrète. Il existe une catégorie monoïdale concrète complète $(\hat{\mathcal{C}}, \{\hat{H}_c\}, \hat{\cdot})$ telle que :*

- $\text{Obj}(\mathcal{C}) \subset \text{Obj}(\hat{\mathcal{C}})$, et pour tous $c, d \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:
- $\hat{H}_c = H_c$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) = \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(c, d)$,
- $rs = r \hat{\cdot} s$.

De plus tout ensemble d'objets engendrant $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ engendre $(\hat{\mathcal{C}}, \{\hat{H}_c\}, \hat{\cdot})$.

// On définit d'abord une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$. Les objets de $\tilde{\mathcal{C}}$ sont les couples $(H, (c_k, s_k)_{k \in \Delta})$ avec H espace de Hilbert de dimension finie, Δ ensemble fini, les c_k des objets de \mathcal{C} et les s_k des applications de $L(H_{c_k}, H)$ telles que $s_k^* s_l \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c_l, c_k)$ et $\sum s_k s_k^* = \text{Id}_H$. Les morphismes entre $\tilde{c} = (H, (c_k, s_k)_{k \in \Delta})$ et $\tilde{d} = (K, (d_l, t_l)_{l \in \Gamma})$ sont les éléments r de $L(H, K)$ tels que $t_l^* r s_k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c_k, d_l)$ pour tous $k \in \Delta, l \in \Gamma$. Avec les mêmes notations, le produit est $\tilde{c} \tilde{d} = (H \otimes K, (c_k d_l, s_k \otimes t_l)_{k \in \Delta, l \in \Gamma})$. Enfin l'espace associé à \tilde{c} est H . Puis on quotiente $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\hat{\mathcal{C}}$ par $\tilde{c} \sim \tilde{d} \Leftrightarrow (H = K \text{ et } \text{Id}_H \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{c}, \tilde{d}))$, toujours avec les mêmes notations. $\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{c}, \tilde{d})$, $\tilde{H}_{\tilde{c}}$ et $\tilde{c} \tilde{d}$ ne dépendent que des classes de \tilde{c} et \tilde{d} , ils définissent donc $\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\hat{c}, \hat{d})$, $\hat{H}_{\hat{c}}$ et $\hat{c} \hat{d}$ pour $\hat{c}, \hat{d} \in \text{Obj}(\hat{\mathcal{C}})$. $\hat{\mathcal{C}}$ est de manière évidente une catégorie monoïdale concrète.

$\hat{\mathcal{C}}$ vérifie la propriété suivante. Pour tout $(H, (\hat{c}_k, \hat{s}_k)_{k \in \Delta})$ avec H espace de Hilbert de dimension finie, Δ ensemble fini, \hat{c}_k des objets de $\hat{\mathcal{C}}$, et \hat{s}_k des applications de $L(\hat{H}_{\hat{c}_k}, H)$ telles que $\hat{s}_k^* \hat{s}_l \in \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\hat{c}_l, \hat{c}_k)$ et $\sum \hat{s}_k \hat{s}_k^* = \text{Id}_H$, il existe $\hat{d} \in \text{Obj}(\hat{\mathcal{C}})$ tel que $\hat{H}_{\hat{d}} = H$ et pour tout $k \in \Delta$: $\hat{s}_k \in \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\hat{c}_k, \hat{d})$. Cela implique facilement que $\hat{\mathcal{C}}$ est complète : pour la s -équivalence, considérer $(H', (c, s))$, pour l'inclusion, considérer $(pH, (c, p))$, et pour la somme directe, considérer $(H \oplus H', ((\hat{c}, i_{\text{can}}), (\hat{c}', i'_{\text{can}})))$.

Pour $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ on pose $\tilde{c} = (H_c, (c, \text{Id}_{H_c}))$ et on appelle \hat{c} la classe de \tilde{c} . Cela définit une injection de $\text{Obj}(\mathcal{C})$ dans $\text{Obj}(\hat{\mathcal{C}})$ qui permet d'identifier \mathcal{C} à une sous-catégorie monoïdale concrète de $\hat{\mathcal{C}}$ (ce sont les quatre premières assertions de l'énoncé) — les vérifications sont immédiates. Les objets de $\hat{\mathcal{C}}$ s'obtiennent à partir de ceux de \mathcal{C} par équivalence, inclusion et somme directe (ce qui assure la dernière assertion de l'énoncé), grâce à la définition de \mathcal{C} et à la forme des objets engendrés par une partie de $\text{Obj}(\mathcal{C})$ donnée dans la définition 11. //

En utilisant une construction de catégories monoïdales concrètes analogue à celle des monoïdes libres on obtient maintenant :

Théorème 4 *Soit $E = (E_{i_1, \dots, i_N}) \in (\mathbb{C}^N)^{\otimes N}$ ($1 \leq i_1, \dots, i_N \leq N$). Notons $E_{-k} = (E_{i_1, \dots, i_{N-1}, k}) \in (\mathbb{C}^N)^{\otimes N-1}$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, et de même $E_{k-} = (E_{k, i_2, \dots, i_N})$. Si les familles (E_{-k}) et (E_{k-}) sont libres, alors la C^* -algèbre unifère A engendrée par N^2 générateurs $\{kl u\}$ et les relations*

$$\forall l, m \quad \sum_{kl} kl u^* {}_{km} u = \sum_{mk} {}_{mk} u {}_{lk} u^* = \delta_{lm} 1 \quad (25)$$

$$\forall (l_j) \quad \sum_{l_1 k_1} {}_{l_1 k_1} u \cdots {}_{l_N k_N} u E_{k_1, \dots, k_N} = E_{l_1, \dots, l_N} 1, \quad (26)$$

munie de $u = (kl u)_{lk} \in M_N(A)$, est un groupe quantique compact matriciel.

// Remarquons que (25) traduit l'unitarité de u , et est donc toujours vérifiée à un choix de structure hermitienne près pour un groupe quantique, tandis que (26) s'écrit aussi $u^{\otimes N}(E \otimes 1) = (E \otimes 1)1$, si on identifie E à un élément de $L(\mathbb{C}, H_f^{\otimes N})$ (avec $H_f = \mathbb{C}^N$). Il est donc raisonnable d'espérer reconstruire A à partir d'une catégorie monoïdale concrète complète $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ engendrée par une paire d'objets conjugués $\{f, \bar{f}\}$, telle que $E \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f^N)$. Plus précisément on considère la catégorie monoïdale concrète «libre» à un générateur f définie comme suit :

- les objets sont 1 et les f^n ($n \in \mathbb{N}^*$),
- $H_1 = \mathbb{C}$, $H_f = \mathbb{C}^N$, $H_{f^n} = H_f^{\otimes n}$,
- $f^k f^l = f^{k+l}$,
- les morphismes sont les combinaisons linéaires de monômes,

où on appelle monôme un produit d'applications du type $\text{Id}_{f^k} \otimes E \otimes \text{Id}_{f^l}$ ou du type $\text{Id}_{f^k} \otimes E^* \otimes \text{Id}_{f^l}$. On vérifie aisément les axiomes, et on appelle $(\mathcal{C}, \{H_c\}, \cdot)$ la catégorie monoïdale concrète complète associée par le lemme 4.1. Il reste à montrer que f admet un conjugué.

En fait il est contenu dans f^{N-1} : soit \bar{H} le sous-espace de $H_{f^{N-1}}$ engendré par la famille libre (E_{k-}) , p la projection orthogonale $H_{f^{N-1}} \mapsto \bar{H}$ et i l'injection $\bar{H} \mapsto H_{f^{N-1}}$. Il existe un objet \bar{f} tel que $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f^{N-1}, \bar{f})$: en effet la C^* -algèbre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f^{N-1}, f^{N-1})$ contient $q = (E^* \otimes \text{Id}_{f^{N-1}})(\text{Id}_{f^{N-1}} \otimes E)$ dont l'image est \bar{H} (grâce à l'hypothèse sur E et à l'expression $q(\zeta) = \sum (E_{-k} | \zeta) E_{k-}$), donc aussi la projection orthogonale de $L(H_f^{N-1})$ sur \bar{H} , et l'assertion s'ensuit par complétude de $(\mathcal{C}, \{H_c\})$. Soit $j : H_f \rightarrow \bar{H}$ l'antiisomorphisme qui à e_k associe E_{k-} . On a $t_j = \sum e_k \otimes E_{k-} = (\text{Id}_f \otimes p) \circ E \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f\bar{f})$ et de même, introduisant $q' \in L(H_{f^{N-1}})$ telle que $qq' = p^{H_{f^{N-1}}}$:

$$\begin{aligned} \bar{t}_j(\zeta \otimes \zeta') &= (j^{-1}(\zeta) | \zeta') = (j^{-1} p q q' i(\zeta) | \zeta'), \quad \text{et par def. de } q \text{ puis } j : \\ \bar{t}_j(\zeta \otimes \zeta') &= \sum (j^{-1} p(E_{k-}) | \zeta') (E_{-k} | q' i(\zeta)) = \sum (e_k | \zeta') (E_{-k} | q' i(\zeta)) \\ &= \sum (E_{-k} \otimes e_k | q' i(\zeta) \otimes \zeta') = (E | q' i(\zeta) \otimes \zeta'), \end{aligned}$$

d'où $\bar{t}_j = E^* \circ (q' i \otimes \text{Id}_f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{f}f, 1)$ et \bar{f} est bien conjugué à f .

Le paragraphe précédent nous donne alors un groupe quantique compact matriciel (A, u) dont les morphismes d'entrelacement sont les morphismes de \mathcal{C} . Cela implique, comme on l'a déjà remarqué, que A vérifie (25) et (26), et est engendrée par les $kl u$. De plus si une autre C^* -algèbre B munie d'une matrice unitaire $v \in M_N(B)$ vérifie ces trois assertions, un résultat du paragraphe précédent assure qu'il existe un morphisme surjectif de C^* -algèbre $\Psi : A \rightarrow B$ tel que $\text{Id} \otimes \Psi(u) = v$ (on construit la famille $\{v^c\}$ par produit tensoriel, somme directe, restriction et équivalence à partir de v , la condition (26) sur B assurant que les morphismes de \mathcal{C} entrelacent les v^c). Autrement dit A est la C^* -algèbre unifère engendrée par les N^2 générateurs $\{kl u\}$ et les relations (25) et (26), c'est-à-dire celle de l'énoncé. //

Il n'est pas évident que les groupes quantiques compacts matriciels ainsi obtenus ne soit pas triviaux (ie que A ne soit pas nulle). Cependant si on prend $E_{k_1, \dots, k_N} = \varepsilon(i \mapsto k_i)$ (où la signature d'une application non bijective est définie comme nulle), alors (26) s'écrit simplement $\forall \tau \in \llbracket 1, N \rrbracket^{\llbracket 1, N \rrbracket} \det(u^\tau) = \varepsilon(\tau)1$ où τ agit sur $M_N(A)$ par «permutation» des lignes. Cela équivaut bien sûr à $\det(u) = 1$, et A est l'algèbre des fonctions sur $SU(N)$ (on verra en effet au corollaire 5.2 que A est dans ce cas commutative). Inspirons-nous de ce cas classique :

Définition 13 Soit E_ν l'élément de $(\mathbb{C}^N)^{\otimes N}$ défini par

$$E_{k_1, \dots, k_N}^\nu = \begin{cases} (-\nu)^{I(i \mapsto k_i)} & \text{si } (i \mapsto k_i) \text{ est une permutation,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

E_ν vérifie les hypothèses du théorème 4, on appelle $SU_\nu(N)$ le groupe quantique compact associé (groupe **spécial unitaire déformé**).

La non-trivialité de $SU_\nu(N)$ provient essentiellement du fait qu'on n'a pas «trop» de morphismes dans la catégorie monoïdale concrète complète associée, ie qu'on n'en obtient pas d'autre (par

formation des monômes) que ceux qui sont explicites dans la définition. Les deux résultats qui suivent établissent ce fait dans le cas de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f^N)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, f)$. Le cas de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f^n, f^n)$ pour $n > 1$ nécessitera l'introduction de la volte.

Proposition 14 *Soit u la représentation fondamentale de $SU_{\nu}(N)$. On a $\text{Mor}(1, u^{\oplus N}) = \mathbb{C} E_{\nu}$.*

// Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et $p = m + N + n$. Soit $e_{k_1, \dots, k_{pN}} = e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_{pN}} \in H_f^{\otimes pN}$. Introduisons le coefficient de $\text{Id}_{f^m} \otimes E_{\nu} \otimes \text{Id}_{f^n}$:

$$c = \lambda_{k'_1, \dots, k'_{(p+1)N}}^{k_1, \dots, k_{pN}} = e_{k'_1, \dots, k'_{(p+1)N}}^* \circ (\text{Id}_{f^m} \otimes E_{\nu} \otimes \text{Id}_{f^n})(e_{k_1, \dots, k_{pN}}).$$

Si c est non nul, $(k'_{mN+1}, \dots, k'_{mN+N})$ définit une permutation σ de $\llbracket 1, N \rrbracket$, par définition de E_{ν} . Soit $p < q$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. Quand on échange les p et les q figurant dans (k_i) , et dans (k'_i) , c est multiplié par $(-\nu)^{-1}$ si $\sigma^{-1}(p) > \sigma^{-1}(q)$ (paire inversée), par $-\nu$ sinon (paire normale) : c'est évident sur la définition de E_{ν} . De même, soit

$$c = \lambda_{k_1, \dots, k_{pN}}^{k'_1, \dots, k'_{(p+1)N}} = e_{k_1, \dots, k_{pN}}^* \circ (\text{Id}_{f^m} \otimes E_{\nu}^* \otimes \text{Id}_{f^n})(e_{k'_1, \dots, k'_{(p+1)N}}).$$

Si c est non nul, $(k'_{mN+1}, \dots, k'_{mN+N})$ définit une permutation σ de $\llbracket 1, N \rrbracket$, par définition de E_{ν} . Soit $p < q$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. Quand on échange les p et les q figurant dans (k_i) , et dans (k'_i) , c est multiplié par $(-\nu)^{-1}$ si $\sigma^{-1}(p) > \sigma^{-1}(q)$ (paire inversée) et par $-\nu$ sinon (paire normale).

Soit maintenant $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f^N)$ un monôme. C'est un produit de r applications des deux types qu'on vient d'étudier. La composante $\Lambda_{k_1, \dots, k_N}$ suivant e_{k_1, \dots, k_N} de $s(1)$ est une somme de produits de coefficients c :

$$\Lambda_{k_1, \dots, k_N} = \sum_{((k_i^j)_i), 1 \leq j < r} \prod_{j=1}^r \lambda_{(k_i^j)_i}^{(k_i^{j-1})_i}, \quad (27)$$

où (k_i^0) est de longueur nulle et $(k_i^r) = (k_i)$. Pour qu'un des termes de la somme soit non nul, il est nécessaire que le nombre d'occurrences de $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$ dans $(k_i^j)_i$ ne dépende pas de q : la démonstration, par récurrence sur j , en est immédiate grâce à ce qui précède. En particulier si $\Lambda_{k_1, \dots, k_N}$ est non nul, alors chaque élément de $\llbracket 1, N \rrbracket$ apparaît exactement une fois dans $(k_i)_i$, qui définit donc une permutation σ de $\llbracket 1, N \rrbracket$. Comme plus haut, prenons $p < q$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $\sigma^{-1}(p) > \sigma^{-1}(q)$. Si on échange p et q dans $(k_i)_i$, on fait bien sûr se correspondre un à un les termes des deux sommes (27) en échangeant aussi tous les p et q dans les $(k_i^j)_i$. De plus $\sigma^{-1}(p) > \sigma^{-1}(q)$ implique qu'on se trouve alors une fois de plus dans un cas avec paire inversée que dans un cas avec paire normale. Ainsi $\Lambda_{k_1, \dots, k_N}$ est multiplié par $(-\nu)^{-1}$.

En appliquant cela, par récurrence sur $I(\sigma)$, à chaque inversion de σ , on obtient $\Lambda_{k_1, \dots, k_N} = (-\nu)^{I(\sigma)} \Lambda_{1, \dots, N} = E_{k_1, \dots, k_N}^{\nu} \Lambda_{1, \dots, N}$. Ainsi $s \in \mathbb{C} E_{\nu}$ et comme les monômes engendrent par définition $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f^N)$, c'est le résultat voulu. //

On en déduit un lemme pour le théorème 5 du paragraphe 5).

Lemme 5.1 *La représentation fondamentale de $SU_{\nu}(N)$ est irréductible.*

// Soit $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, f)$. On a $(s \otimes \text{Id}_{f^{N-1}}) \circ E_{\nu} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, f^N)$ donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $(s \otimes \text{Id}_{f^{N-1}}) \circ E_{\nu} = c E_{\nu}$. Soit alors $\zeta \in H_f$, $(E_{k_-}^{\nu})$ étant libre il existe $\varphi \in H_{f^{N-1}}^*$ telle que $\zeta = (\text{Id}_f \otimes \varphi) \circ E_{\nu}(1)$. On a donc

$$s(\zeta) = (\text{Id}_f \otimes \varphi) \circ (s \otimes \text{Id}_{f^{N-1}}) \circ E_{\nu}(1) = c (\text{Id}_f \otimes \varphi) \circ E_{\nu}(1) = c \zeta,$$

donc $s = c \text{Id}_f$. Cela entraîne l'irréductibilité par la proposition 7. //

4) Déformation de la volte

On introduit et étudie maintenant un analogue non commutatif de l'application $\Sigma : \zeta \otimes \zeta' \mapsto \zeta' \otimes \zeta$ qui entrelace les produits tensoriels de représentations des groupes compacts «classiques» (cf. la proposition 10). Il a à la fois un intérêt mathématique et physique (cf. la REMARQUE suivant le corollaire 5.2).

Définition 14 Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\nu \in [0, 1]$. On définit la ν -signature de $\sigma \in \llbracket 1, N \rrbracket^{\llbracket 1, N \rrbracket}$ par :

$$\varepsilon_\nu(\sigma) = \begin{cases} (-\nu)^{I(\sigma)} & \text{si } \sigma \text{ est un permutation,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (28)$$

On définit la ν -factorielle de N par $F_\nu(N) = \sum \varepsilon_\nu(\sigma)^2$ (σ parcourt \mathfrak{S}_N). Soit $H = \mathbb{C}^N$ et $E_\nu \in L(\mathbb{C}, H)$ défini dans la base canonique par $E_\nu(1) = \sum \varepsilon_\nu(\sigma) e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(N)}$. On définit la ν -volte sur $H \otimes H$ par :

$$\Sigma_\nu = \text{Id}_{H^{\otimes 2}} - \frac{\nu^{-2(N-2)}}{F_\nu(N-2)} (\text{Id}_{H^{\otimes 2}} \otimes E_\nu^*) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes 2}}).$$

La proposition qui suit montre que Σ_ν est bien une déformation de la volte classique Σ .

Proposition 15 Soit (e_k) la base canonique de $H = \mathbb{C}^N$. On a pour tous $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\Sigma_\nu(e_k \otimes e_l) = \begin{cases} \nu(e_l \otimes e_k) & \text{pour } k < l, \\ e_l \otimes e_k & \text{pour } k = l, \\ \nu(e_l \otimes e_k) + (1 - \nu^2)(e_k \otimes e_l) & \text{pour } k > l. \end{cases} \quad (29)$$

On a de plus les relations

$$\Sigma_\nu^* = \Sigma_\nu, \quad \Sigma_\nu^2 = (1 - \nu^2)\Sigma_\nu + \nu^2 \text{Id}_{H^{\otimes 2}}, \quad (30)$$

$$(\Sigma_\nu \otimes \text{Id}_H) \circ (\text{Id}_H \otimes \Sigma_\nu) \circ (\Sigma_\nu \otimes \text{Id}_H) = (\text{Id}_H \otimes \Sigma_\nu) \circ (\Sigma_\nu \otimes \text{Id}_H) \circ (\text{Id}_H \otimes \Sigma_\nu), \quad (31)$$

$$(\text{Id}_{H^{\otimes k}} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes(N-k-2)}}) \circ E_\nu = -\nu^2 E_\nu \quad \text{et} \quad (32)$$

$$E_\nu^* \circ (\text{Id}_{H^{\otimes k}} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes(N-k-2)}}) = -\nu^2 E_\nu^* \quad \text{pour } k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket \quad (33)$$

(symétrie, défaut d'involutivité, équation des tresses, équations de simplification).

// On calcule $\eta_{kl} = (\text{Id}_{H^{\otimes 2}} \otimes E_\nu^*) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes 2}})(e_k \otimes e_l)$:

$$\begin{aligned} \eta_{kl} &= (\text{Id}_{H^{\otimes 2}} \otimes E_\nu^*) \left[\sum \varepsilon_\nu(\sigma) (e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(N)} \otimes e_k \otimes e_l) \right] \\ &= \sum \varepsilon_\nu(\sigma) \varepsilon_\nu(\tau) (e_{\sigma(1)} \otimes e_{\sigma(2)}) (\delta_{\sigma(3), \tau(1)} \cdots \delta_{\sigma(N), \tau(N-2)} \delta_{k, \tau(N-1)} \delta_{l, \tau(N)}) \quad (34) \\ &= \sum [\varepsilon_\nu(\sigma_{\rho kl}) \varepsilon_\nu(\tau_{\rho kl}) (e_k \otimes e_l) + \varepsilon_\nu(\sigma_{\rho lk}) \varepsilon_\nu(\tau_{\rho lk}) (e_l \otimes e_k)], \end{aligned}$$

où les deux premières sommes courent sur \mathfrak{S}_N et la dernière, sur les applications bijectives $\rho : \llbracket 1, N-2 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{k, l\}$, avec la notation :

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho kl} &= (1 \mapsto k, 2 \mapsto l, i+2 \mapsto \rho(i)) \quad \text{et} \\ \tau_{\rho kl} &= (i \mapsto \rho(i), N-1 \mapsto k, N \mapsto l). \end{aligned}$$

En effet les termes non nuls de la somme (34) sont ceux pour lesquels $\tau(i) = \sigma(i+2)$, $\tau(N-1) = k$ et $\tau(N) = l$, ce qui n'est possible que si $(\sigma(1), \sigma(2))$ vaut (k, l) ou (l, k) . Or on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} I(\sigma_{\rho kl}) &= \begin{cases} I(\rho) + (k-1) + (l-2) & \text{si } k < l, \\ I(\rho) + (k-2) + (l-1) + 1 & \text{si } k > l, \end{cases} \\ I(\tau_{\rho kl}) &= \begin{cases} I(\rho) + (N-k) + (N-l-1) + 1 & \text{si } k > l, \\ I(\rho) + (N-k-1) + (N-l) & \text{si } k < l. \end{cases} \end{aligned}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\eta_{kl} = F_\nu(N-2) \nu^{2(N-2)} \begin{cases} (e_k \otimes e_l) - \nu(e_l \otimes e_k) & \text{si } k < l, \\ 0 & \text{si } k = l, \\ \nu^2(e_k \otimes e_l) - \nu(e_l \otimes e_k) & \text{si } k > l, \end{cases}$$

ce qui donne le résultat recherché pour $\Sigma_\nu(e_k \otimes e_l)$. Les autres identités de l'énoncé se vérifient alors simplement par calcul dans une base (et en utilisant la définition de E pour les deux dernières). //

Notons $\Sigma_\nu^{(i\ j)}$ l'application de $L(H^{\otimes n})$ agissant sur les espaces i et j du produit tensoriel par Σ_ν , et sur les autres par l'identité. Puis posons pour une permutation quelconque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, dont une décomposition minimale en transposition est $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k : \Sigma_\nu^\sigma = \Sigma_\nu^{\tau_1} \circ \cdots \circ \Sigma_\nu^{\tau_k}$. Grâce à l'équation des tresses (31) cela ne dépend pas de la décomposition minimale choisie. On voit d'autre part grâce à (30) que $\text{Sp}(\Sigma_\nu) = \{1, -\nu^2\}$.

Définition 15 Soit $H = \mathbb{C}^N$. $\zeta \in H^{\otimes 2}$ est dit ν -symétrique (resp. ν -antisymétrique) s'il est valeur propre de Σ_ν pour la valeur propre 1 (resp. $-\nu^2$). $\zeta \in H^{\otimes n}$ est dit **complètement ν -antisymétrique** si on a $\forall k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket \quad \text{Id}_{H^{\otimes k}} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes (N-k-2)}}(\zeta) = -\nu^2 \zeta$. On note $H^{\wedge n} \subset H^{\otimes n}$ le sous-espace des vecteurs complètement ν -antisymétriques. On appelle enfin ν -antisymétriseur l'élément $A_n = \sum \varepsilon_1(\sigma) \Sigma_\nu^\sigma$ de $L(H^{\otimes n})$.

La proposition qui suit justifie le terme «antisymétriseur».

Proposition 16 Soit $P_n \in L(H^{\otimes n})$ la projection orthogonale sur $H^{\wedge n}$. On a $A_n = F_\nu(n)P_n$. En particulier $A_N = E_\nu E_\nu^*$.

// Soit $\tau = (i\ j)$ une transposition. On a (dans le premier cas les décompositions minimales en transpositions se recollent — dans le deuxième on doit utiliser (30)) :

$$\Sigma_\nu^\tau \Sigma_\nu^\sigma = \begin{cases} \Sigma_\nu^{\tau\sigma} & \text{si } \sigma \text{ inverse } (i, j), \\ (1 - \nu^2) \Sigma_\nu^\sigma + \nu^2 \Sigma_\nu^{\tau\sigma} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (35)$$

En particulier on obtient $\Sigma_\nu^\tau \Sigma_\nu^\sigma - \Sigma_\nu^\tau \Sigma_\nu^{\tau\sigma} = \nu^2 (\Sigma_\nu^{\tau\sigma} - \Sigma_\nu^\sigma)$ dans les deux cas. Or on a $A_n = \frac{1}{2} \sum (\varepsilon_1(\sigma) \Sigma_\nu^\sigma + \varepsilon_1(\tau\sigma) \Sigma_\nu^{\tau\sigma}) = \frac{1}{2} \sum \varepsilon_1(\sigma) (\Sigma_\nu^\sigma - \Sigma_\nu^{\tau\sigma})$. Donc $\Sigma_\nu^\tau A_n = -\nu^2 A_n$, ce qui montre que l'image de A_n est incluse dans $H^{\wedge n}$.

Soit alors $\zeta \in H^{\wedge n}$, par définition on a $\Sigma_\nu^\tau(\zeta) = -\nu^2 \zeta$ pour tout transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$. On voit ainsi, par une récurrence sur le nombre d'inversions de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, que $\Sigma_\nu^\sigma(\zeta) = (-\nu^2)^{I(\sigma)} \zeta$. En sommant sur \mathfrak{S}_n après avoir multiplié par $\varepsilon_1(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ on reconnaît $A_n(\zeta) = F_\nu(n) \zeta$. Ainsi A_n coïncide sur $H^{\wedge n}$ avec $F_\nu(n) \text{Id}_{H^{\otimes n}}$. Comme c'est une application autoadjointe d'image dans $H^{\wedge n}$, c'est $F_\nu(n)P_n$.

Quand $n = N$ on obtient indépendamment $E_\nu E_\nu^* = F_\nu(N)P_N$. $E_\nu(1)$ est bien sûr un vecteur complètement antisymétrique, et c'est le seul à une constante près : quand $n = N$, ζ est déterminé par $\zeta_{1, \dots, N}$. Donc $\text{Im}(E_\nu E_\nu^*) = \mathbb{C} E(1) = H^{\wedge N}$. Or $E_\nu E_\nu^*$ est autoadjoint et $E_\nu E_\nu^*(E_\nu(1)) = (E_\nu^* E_\nu(1)) E_\nu(1) = F_\nu(N) E_\nu(1)$, le même raisonnement que précédemment donne donc le résultat. //

On en déduit un lemme pour le théorème 5 du paragraphe suivant.

Lemme 5.2 Soit u la représentation fondamentale de $SU_\nu(N)$ (d'espace H) et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $s \in \text{Mor}(u^{\otimes n}, u^{\otimes n})$ un opérateur autoadjoint. Si on a $(\text{Id}_{H^{\otimes k}} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes l}}) \circ s = -\nu^2 s$ pour tous k, l tels que $k + l = n - 2$, alors s est un multiple de A_n .

// On procède comme pour le lemme 5.1 : d'après la première hypothèse, $(s \otimes \text{Id}_{H^{\otimes (N-n)}}) \circ E_\nu \in \text{Mor}(1, u^{\otimes N})$ donc $(s \otimes \text{Id}_{H^{\otimes (N-n)}}) \circ E_\nu = c E_\nu$ (proposition 14). Mettant alors $\zeta \in H^{\wedge n}$ sous la forme $\text{Id}_{H^{\otimes n}} \otimes \varphi(E_\nu(1))$ avec $\varphi \in H^{\otimes (N-n)*}$ (par antisymétrie), on a : $s(\zeta) = (\text{Id}_{H^{\otimes n}} \otimes \varphi) \circ (s \otimes \text{Id}_{H^{\otimes (N-n)}}) \circ E_\nu(1) = c (\text{Id}_{H^{\otimes n}} \otimes \varphi) \circ E_\nu(1) = c \zeta$. Ainsi s coïncide avec $\text{Id}_{H^{\otimes n}}$ sur $H^{\wedge n}$. Comme d'autre part $\text{Im}(s) \subset H^{\wedge n}$ (deuxième hypothèse) et s est autoadjoint, cela implique que $s = c P_n$. La proposition 16 donne alors immédiatement le résultat. //

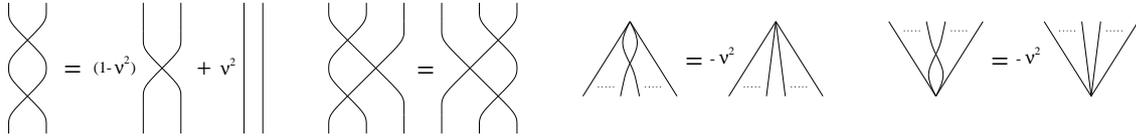
5) Représentations de $SU_\nu(N)$

On introduit, pour une lecture plus facile de la démonstration du théorème 5, la notation qui suit. Un diagramme représente une application linéaire de $H^{\otimes p}$ dans $H^{\otimes q}$, où p est le nombre de ligne entrante (en haut) et q celui des lignes sortantes. On part des diagrammes de base suivants (on n'a pas de diagramme pour représenter Σ_ν^{-1}) :

$$E_\nu = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad E_\nu^* = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \text{id} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad \Sigma_\nu = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

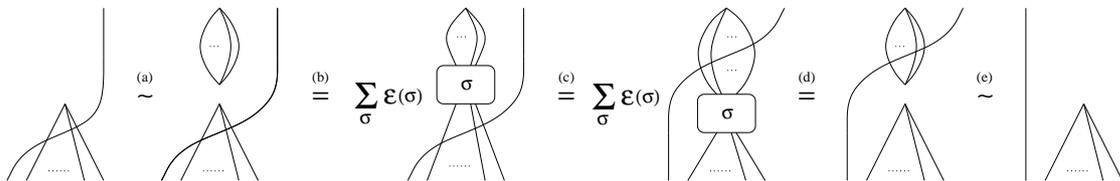
La composée de deux applications est représentée en mettant les diagrammes correspondants l'un au-dessus de l'autre, et le produit tensoriel, en les mettant côte-à-côte. On appelle vertex un point

où se rejoignent des lignes, comme dans les diagrammes de E_ν et E_ν^* . Les équations (30)–(33) du défaut d'involutivité, des tresses, et de simplification s'écrivent par exemple avec la notation diagrammatique :



Théorème 5 Soit u la représentation fondamentale de $SU_\nu(N)$ et $H = \mathbb{C}^N$ son espace, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors $\text{Mor}(u^{\otimes n}, u^{\otimes n})$ est engendré par les $\text{Id}_{H^{\otimes k}} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{H^{\otimes l}}$ avec $k + l = n - 2$.

// Commençons par un lemme dont l'énoncé et la démonstration tiennent dans la ligne suivante, où les rectangles contenant le symbole σ représentent l'application Σ_ν^σ , et où \sim signifie «est proportionnel à» :

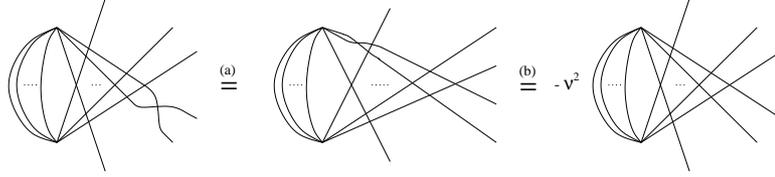


Algébriquement ce résultat s'écrit $\Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \sim \text{Id}_H \otimes E_\nu$, où $\gamma \in \mathfrak{S}_{N+1}$ est la permutation circulaire ($i \mapsto i + 1, N + 1 \mapsto 1$), et la démonstration prend la forme :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{F_\nu(N)} \Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \circ (E_\nu^* E_\nu \otimes \text{Id}_H) \quad (\text{calcul de } E_\nu^* E_\nu) \\
&= \frac{1}{F_\nu(N)} \Sigma_\nu^\gamma \circ (A_N \otimes \text{Id}_H) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \quad (\text{proposition 16}) \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{F_\nu(N)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon_1(\sigma) \Sigma_\nu^\gamma \circ (\Sigma_\nu^\sigma \otimes \text{Id}_H) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \quad (\text{def. de } A_N) \\
&\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{F_\nu(N)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon_1(\sigma) (\text{Id}_H \otimes \Sigma_\nu^\sigma) \circ \Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \\
&\stackrel{(d)}{=} \frac{1}{F_\nu(N)} (\text{Id}_H \otimes A_N) \circ \Sigma_\nu^\gamma \circ (E \otimes \text{Id}_H) \quad (\text{d\'efinition de } A_N) \\
&= \frac{1}{F_\nu(N)} (\text{Id}_H \otimes E_\nu) \circ (\text{Id}_H \otimes E_\nu^*) \circ \Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H) \quad (\text{prop. 16}) \\
&\stackrel{(e)}{=} c (\text{Id}_H \otimes E_\nu), \quad \text{avec } c \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

En (c) on utilise l'\'equation des tresses (31) avec l'expression $\gamma = (1\ 2) \cdots (N\ N+1)$, et en choisissant une d\'ecomposition en transpositions minimales de σ ne contenant que des transpositions de la forme $(i\ i+1)$, avec $i \leq N$. (e) provient du fait que $(\text{Id}_H \otimes E_\nu^*) \circ \Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_H)$ est un morphisme d'entrelacement entre u et lui-m\^eme, donc un multiple de Id_H (lemme 5.1).

Un deuxi\^eme lemme s'exprime graphiquement comme suit :



Soit m, n deux entiers tels que $m + n = N$, notons $\text{Id}_n = \text{Id}_{H^{\otimes n}}$, etc... Soit $t = (E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ (\text{Id}_m \otimes \Sigma_\nu^\rho) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n) \in L(H^{\otimes n})$, o\^u $\rho \in \mathfrak{S}_{2n}$ est d\'efinie par $\rho(i) = i + n$ si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\rho(i) = i - n$ sinon. Le lemme affirme alors que t v\'erifie les hypoth\eses du lemme 5.2, d\'emonstrons-le alg\ebriquement : si $k + l = n - 2$ on a

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_k \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_l) \circ t &= (E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ (\text{Id}_{N+k} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_l) \circ (\text{Id}_m \otimes \Sigma_\nu^\rho) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n) \\
&\stackrel{(a)}{=} (E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ (\text{Id}_m \otimes \Sigma_\nu^\rho) \circ (\text{Id}_{m+k} \otimes \Sigma_\nu \otimes \text{Id}_{l+n}) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n) \\
&\stackrel{(b)}{=} -\nu^2 (E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ (\text{Id}_m \otimes \Sigma_\nu^\rho) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n) = -\nu^2 t.
\end{aligned}$$

En (a) on a utilis\'e comme plus haut l'\'equation des tresses (31) : ρ est une puissance de permutation circulaire. (b) provient de l'\'equation de simplification (32). Le lemme 5.2 montre alors que t est un multiple de A_n .

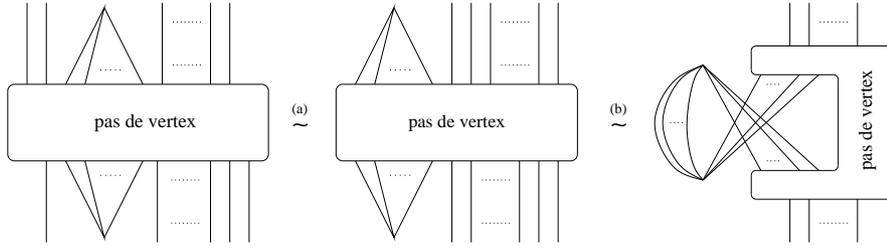
Passons maintenant \a la d\'emonstration du th\'eor\eme. $s \in \text{Mor}(u^{\otimes n}, u^{\otimes n})$ est un produit d'applications de la forme Σ_ν^σ , $\text{Id}_k \otimes E_\nu \otimes \text{Id}_l$ ou $\text{Id}_k \otimes E_\nu^* \otimes \text{Id}_l$, avec $2p$ termes du dernier type. On proc\ede par r\'ecurrence sur p : si $p = 0$, il n'y a rien \a d\'emontrer. Sinon, on utilise l'identit\'e, obtenue par applications successives du premier lemme ci-dessus, pour $r \in L(H^{\otimes k+l})$ quelconque :

$$(\text{Id}_k \otimes E_\nu \otimes \text{Id}_l) \circ r = c \Sigma_\nu^\gamma \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_{k+l}) \circ r = c \Sigma_\nu^\gamma \circ (\text{Id}_N \otimes r) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_{k+l}),$$

avec γ une certaine permutation de \mathfrak{S}_{N+k+l} et c un complexe. Elle permet d'exprimer s sous la forme $(E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ s' \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n)$, o\^u s' est un produit d'au plus $2(p - 1)$ applications du type $\text{Id}_k \otimes E_\nu \otimes \text{Id}_l$ ou $\text{Id}_k \otimes E_\nu^* \otimes \text{Id}_l$. Par hypoth\ese de r\'ecurrence, s' est en fait une combinaison lin\'eaire d'applications Σ_ν^σ . Gr\^ace aux \'equations (30) et (31), on peut alors \'ecrire (\sim signifie : «est combinaison lin\'eaire de termes de la forme») :

$$s \stackrel{(a)}{\sim} (E_\nu^* \otimes \text{Id}_n) \circ s' \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_n) \stackrel{(b)}{\sim} s_1 \circ (E_\nu^* \otimes \text{Id}_{n'}) \circ (\text{Id}_m \otimes \Sigma_\nu^\rho) \circ (E_\nu \otimes \text{Id}_{n'}) \circ s_2,$$

avec $m \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et $n' \in \mathbb{N}$, et o\^u s_1 et s_2 sont des Σ_ν^σ : c'est ce qu'expriment les diagrammes ci-dessus. On reconna\^it alors l'application t du deuxi\^eme lemme.



Elle peut également s'exprimer comme combinaison linéaire d'applications Σ_ν^σ , par définition de A_n , ce qui achève la démonstration. //

Ainsi $\text{Mor}(u^{\oplus n}, u^{\oplus n})$ est l'image d'une représentation de l'algèbre (unifère) de Hecke $\mathcal{H}_{\nu^2, n}$ engendrée par n générateurs g_1, \dots, g_{n-1} et les relations $g_i^2 = (1-\nu^2)g_i + \nu^2 1$, $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ et $g_i g_j = g_j g_i$ (pour tous i, j tels que $|i-j| \geq 2$). On s'est ramené d'une déformation «quantique» de $SU(N)$ (ie une déformation non commutative de l'algèbre des fonctions sur $SU(N)$) à une déformation «classique» de \mathfrak{S}_n (ie une déformation de l'algèbre de groupe de \mathfrak{S}_n — qui est déjà non commutative dans le cas $\nu = 1$). On utilise, pour déduire du théorème 5 le corollaire 5.1 de classification des représentations de $SU_\nu(N)$, les résultats suivants (cf. [47, 23]) de la théorie des représentations des algèbres de Hecke.

Soit \mathcal{Y}_n l'ensemble des tableaux de Young à n cases, et \mathcal{Y}^N celui des tableaux de Young à au plus N rangées. $\mathcal{H}_{\nu^2, n}$ admet un ensemble complet de représentations irréductibles non équivalentes $(\pi^d : \mathcal{H}_n \rightarrow K^d)$ indexées par les tableaux $d \in \mathcal{Y}_n$. De plus notant c^d la plus petite projection de \mathcal{H}_n telle que $\pi^d = \pi^d \circ c^d$, on a $\sum c^d = 1_{\mathcal{H}_n}$. Enfin on a continuité vis-à-vis de ν^2 (qu'on omettra de noter dans la suite) des coefficients de c^d dans une base donnée de \mathcal{H}_n , ainsi que de $\pi^d(h)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_n$ (K^d ne dépend pas de ν^2).

Corollaire 5.1 *Il existe un sous-ensemble $\{u^d \mid d \in \mathcal{Y}^N\}$ de $\text{Rep}_0(SU_\nu(N))$ indexé par les tableaux de Young à au plus N rangées, et contenant toutes les représentation irréductibles à équivalence près, tel que :*

- $\dim u^d = (\dim u^d)_{\nu=1}$,
- u^d et $u^{d'}$ sont équivalentes ssi d et d' ne diffèrent que par des colonnes pleines (ie à N cases),
- dans la décomposition $u^d \oplus u^{d'} = \bigoplus m_{d''}^{dd'} u^{d''}$, $m_{d''}^{dd'} = (m_{d''}^{dd'})_{\nu=1}$.

// Soit π la représentation de \mathcal{H}_n telle que $\pi(\mathcal{H}_n) = \text{Mor}(u^{\oplus n}, u^{\oplus n})$, et H son espace. Le rappel ci-dessus sur les algèbres de Hecke nous fournit les deux résultats essentiels suivants. D'une part on a une décomposition de Id_H maximale dans $\text{Mor}(u^{\oplus n}, u^{\oplus n})$: équation (36). D'autre part, le rang étant continu sur l'ensemble des projections, et à valeurs discrètes, $\text{rg } \pi(c^d)$ ne dépend pas de ν : équation (37).

$$\text{Id}_H = \sum_{\mathcal{Y}_n} \pi(c^d), \quad (36)$$

$$\forall d \in \mathcal{Y}_n \quad \text{rg } \pi(c^d) = (\text{rg } \pi(c^d))_{\nu=1}. \quad (37)$$

On a sur $\pi(c^d)(H)$ une sous-représentation de $u^{\oplus n}$ et une représentation de \mathcal{H}_n , équivalente à des copies de π^d d'après le rappel. Elles commutent donc sont de la forme $u^d \oplus 1$ et $\text{Id} \otimes \pi_1$ respectivement, dans un isomorphisme $\pi(c^d)(H) \simeq H^d \otimes H_1$. Par minimalité, $\pi_1 = \pi^d$, $H_1 = K^d$ et (u^d, H^d) est une représentation irréductible de $SU_\nu(N)$. En outre on a $\dim u^d = (\text{rg } \pi(c^d)) / (\dim K^d)$, et (37) assure que $\dim u^d$ ne dépend pas de ν . En particulier u^d est nulle si d a plus de N rangées (c'est bien connu dans le cas classique : cf. par exemple [44]). Les $u^{\oplus n}$ engendrant la catégorie concrète $\text{Rep}_0(SU_\nu(N))$, il en découle que tout représentation irréductible de $SU_\nu(N)$ est équivalente à une u^d avec $d \in \mathcal{Y}^N$. On a obtenu la première assertion.

Pour la deuxième, commençons par montrer que pour $d \neq d'$ dans $\mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_n$ on a toujours $u^d \not\sim u^{d'}$. Il suffira ensuite de vérifier que u^d ne change pas (à équivalence près) si on ajoute une colonne pleine à d . On a la décomposition $H \simeq \bigoplus H^e \otimes K^e$ (somme sur $\mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_n$), et dans cette identification, π et $u^{\oplus n}$ stabilisent les $H^e \otimes K^e$. Si

$u^d \simeq u^{d'}$ avec $d \neq d'$, on peut alors définir un élément non trivial S de $\text{Mor}(u^{\oplus n}, u^{\oplus n})$ en posant $S|_{H^e \otimes K^e} = \text{Id}$ pour $e \neq d, d'$, $S|_{H^d \otimes K^d} = v \otimes p$ et $S|_{H^{d'} \otimes K^{d'}} = v^* \otimes q$, avec $p \in L(K^d, K^{d'})$ et $q \in L(K^{d'}, K^d)$ quelconques. Il ne stabilise pas les $H^e \otimes K^e$, donc n'est pas dans $\pi(\mathcal{H}_n)$, ce qui contredit le théorème 5. Le résultat annoncé est ainsi démontré, et on peut alors définir les coefficients $m_{d''}^{dd'}$ par $u^d \oplus u^{d'} = \bigoplus m_{d''}^{dd'} u^{d''}$ avec $d \in \mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_n$, $d' \in \mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_{n'}$ et $d'' \in \mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_{n+n'}$.

Soit π, π', π'' les représentations de $\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{n'}, \mathcal{H}_{n+n'}$ dont les images coïncident avec les commutants de $u^{\oplus n}, u^{\oplus n'}$ et $u^{\oplus n+n'}$ respectivement. Soit H, H', H'' leurs espaces. Soit $d \in \mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_n$ et $d' \in \mathcal{Y}^N \cap \mathcal{Y}_{n'}$. $K = \pi(c^d)(H) \otimes \pi'(c^{d'})(H')$ porte la représentation $(u^d \oplus 1) \oplus (u^{d'} \oplus 1) \sim (\dim K^d \otimes K^{d'}) \oplus m_{d''}^{dd'} u^{d''}$ de $SU_\nu(N)$. Mais $K = \pi \otimes \pi'(c^d \otimes c^{d'})(H'')$ porte aussi les représentations $\bigoplus u^{d''} \oplus 1$ (de $SU_\nu(N)$) et $\bigoplus \text{Id} \otimes \pi_1^{d''}$ (de $\mathcal{H}_{n+n'}$), où, comme plus haut, $\pi_1^{d''}$ est une somme de copies de $\pi^{d''}$, de dimension $\text{rg}[\pi''(c^{d''}) \circ (\pi \otimes \pi')(c^d \otimes c^{d'})] / \dim(u^{d''})$. On a ainsi deux expressions de la multiplicité de $u^{d''}$ dans K , identifions-les :

$$\dim K^d \dim K^{d'} m_{d''}^{dd'} = \text{rg}[\pi''(c^{d''}) \circ (\pi(c^d) \otimes \pi'(c^{d'}))] \frac{\dim K^{d''}}{\text{rg} \pi''(c^{d''})}.$$

Cela montre (grâce à (37)) que $m_{d''}^{dd'}$ ne dépend pas de ν , ie la troisième assertion.

En particulier, si d' est une colonne de N cases, la théorie classique assure que $u^{d'} = 1$ et que pour tout $d \in \mathcal{Y}^N$, $u^d \oplus u^{d'} \simeq u^{d''}$ où d'' s'obtient à partir de d par ajout d'une colonne pleine à d . On a donc $u^d \simeq u^{d''}$, et une récurrence immédiate sur le nombre de colonnes pleines achève la démonstration de la deuxième assertion. //

REMARQUE. Ainsi la structure des représentations de $SU_\nu(N)$ est la même que celle du cas classique $\nu = 1$, décrite par exemple dans [44, th. 7.5B et C]. Il existe d'autres groupes quantiques compacts matriciels dont les représentations ont la même structure (en tant que catégorie monoïdale concrète) : dans le cas $N = 2$ cette structure «caractérise» en fait les groupes quantiques compacts «universels orthogonaux» (cf. [17, 2]). Enfin Woronowicz a mené dans [46] une étude plus détaillée du cas $N = 2$, où il donne notamment une construction explicite des représentations de $SU_\nu(2)$. Énonçons pour conclure un résultat qui affirme que les $SU_\nu(N)$ forment bien une déformation non triviale du groupe classique $SU(N)$. L'étude des propriétés de continuité de cette déformation fait l'objet de l'appendice A.

Corollaire 5.2 *Dans le cas $\nu = 1$, l'algèbre sous-jacente à $SU_\nu(N)$ est commutative. Les groupes $SU_\nu(N)$ sont non triviaux.*

// Lorsque $\nu = 1$, le théorème 5 montre que $u^{\oplus n}$ et $u^{\oplus n'}$ commutent, ie Σ entrelace $u^{\oplus n} \oplus u^{\oplus n'}$ et $u^{\oplus n'} \oplus u^{\oplus n}$. Dans les décompositions $u^{\oplus n} = \bigoplus m_d u^d$, $u^{\oplus n'} = \bigoplus m_{d'} u^{d'}$, cela signifie que $\bigoplus \Sigma$ entrelace $\bigoplus m_d m_{d'} (u^d \otimes u^{d'})$ et $\bigoplus m_{d'} m_d (u^{d'} \otimes u^d)$. Les représentations irréductibles commutent donc, ce qui entraîne la commutativité de l'algèbre du groupe quantique par la proposition 10. Les $SU_\nu(N)$ sont non triviaux puisqu'ils possèdent une infinité de représentations non équivalentes. //

REMARQUE. Il est agréable dans l'étude d'une théorie physique de disposer d'un groupe de symétrie qui agit transitivement sur l'espace des phases. Par exemple exemple $SO(3) \times \mathbb{R}$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (rotations et homothéties) : coordonnées «polaires». Dans le cas de la théorie quantique «classique» d'un système de n particules de spin $\frac{1}{2}$, on dispose de l'action de $SU(2)$ par $u^{\otimes n}$ (où u est la représentation fondamentale de $SU(2)$), héritée du cas $n = 1$. Elle n'est pas transitive : $\text{Mor}(u^{\otimes n}, u^{\otimes n})$ est non trivial, c'est l'image d'une représentation π de dimension $2n$ de \mathfrak{S}_n . Par contre $SU(2) \times \mathfrak{S}_n$ agit transitivement par $u^{\otimes n}$ et π . \mathfrak{S}_n s'interprète comme le groupe de symétrie de la théorie pour l'échange des particules. De manière analogue, dans le cas «déformé» de $SU_\nu(2)$, on vient de voir que $\text{Mor}(u^{\oplus n}, u^{\oplus n})$ est l'image d'une représentation π de l'algèbre $\mathcal{H}_{\nu^2, n}$, qui est une déformation de l'algèbre de groupe de \mathfrak{S}_n . De plus on a un plongement naturel de \mathfrak{S}_n dans $\mathcal{H}_{\nu^2, n}$, envoyant les transpositions sur les générateurs g_i , qui correspond à $(\sigma \mapsto \Sigma_\nu^\sigma)$ dans la représentation π . Cela permet de continuer à parler d'échange de particules, cependant $(\Sigma_\nu^\sigma)^2 \neq \text{Id}$: on ne revient pas à l'état initial en échangeant deux fois les deux mêmes particules.

Appendice A Le champ des $SU_\nu(N)$

On étudie dans cette section la «continuité» du groupe quantique $SU_\nu(N)$ par rapport à ν , en utilisant la terminologie et les résultats de [5]. On s'appuie principalement sur les résultats de continuité de la théorie des représentations présentée en 5). Commençons par réécrire plus précisément le début du corollaire 5.1. On omet désormais de préciser l'entier N , et on note $C^0(SU_\nu)$ la C^* -algèbre sous-jacente à SU_ν , Φ_ν son coproduit, H l'espace de Hilbert de sa représentation fondamentale $u_\nu \in L(H) \otimes C^0(SU_\nu)$. X désigne un intervalle $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$.

Lemme 18.1 *Il existe des espaces de Hilbert de dimension finie H^d, K^d , des représentations irréductibles u_ν^d de SU_ν sur H^d , indicés par les tableaux de Young $d \in \mathcal{Y}^N$, et un isomorphisme de $C^0(X)$ -modules hilbertiens :*

$$C^0(X) \otimes H^{\otimes n} \simeq C^0(X) \otimes \bigoplus_{d \in \mathcal{Y}^N} K^d \otimes H^d,$$

tels que dans la fibre au-dessus de ν de cet isomorphisme, $u_\nu^{\otimes n}$ se lise comme $\bigoplus \text{Id} \otimes u_\nu^d$.

// On utilise les projecteurs minimaux $\pi(c_\nu^d)$ associés à la représentation π de $\mathcal{H}_{\nu^2, n}$ sur $H^{\otimes n}$ introduite en 5). Par continuité vis-à-vis de ν , ces projecteurs définissent un élément C^d de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (où $\mathcal{E} = C^0(X) \otimes H^{\otimes n}$) qui induit $C_\nu^d = \pi(c_\nu^d)$ dans la fibre au-dessus de ν . Soit $\mathcal{E}^d = C^d \mathcal{E}$, on a $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{E}^d$ par définition des c_ν^d . Par continuité vis-à-vis de ν (cf. les équations (29)), les opérateurs Σ_ν^σ , qui engendrent $\pi(\mathcal{H}_{\nu^2, n})$ pour tout $\nu \in X$, définissent de même pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un opérateur $C^0(X)$ -linéaire $\Sigma^\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. D'autre part, $u^{\otimes n}$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}) \otimes_{C^0(X)} A$, et on note $u_\omega^{\otimes n}$ l'élément $\text{Id} \otimes \omega(u^{\otimes n})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, pour $\omega \in \mathcal{L}(A, C^0(X))$ un champ continu de formes sur A . \mathcal{E}^d est stable sous les opérateurs Σ^σ et $u_\omega^{\otimes n}$, car c'est le cas dans chaque fibre : cf. 5).

\mathcal{E}^d est globalement trivialisable (cf. [18, lemme 10.8.7]), soit ζ un élément de \mathcal{E}^d non nul dans chaque fibre. On pose $\mathcal{K}^d = \pi(\mathcal{H}_{\nu^2, n})\zeta$, $\mathcal{H}^d = \{u_\omega^{\otimes n}\zeta \mid \omega \in \mathcal{L}(A, C^0(X))\}$, et

$$\begin{aligned} \Theta_1^d : \mathcal{K}^d \otimes_{C^0(X)} \mathcal{H}^d &\longrightarrow \mathcal{E}^d \\ \pi(g)\zeta \otimes u_\omega^{\otimes n}\zeta &\longrightarrow \pi(g)u_\omega^{\otimes n}\zeta. \end{aligned}$$

$\Theta_1^d \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^d)$ est ainsi bien définie car les $\pi(g)$ commutent avec les $u_\omega^{\otimes n}$. Le corollaire 5.1 contient en particulier la surjectivité, donc l'injectivité, de Θ_1^d dans chaque fibre. Par conséquent, Θ_1^d est une bijection (tous les modules hilbertiens considérés sont trivialisables et de dimension finie). De plus \mathcal{K}^d et \mathcal{H}^d sont respectivement stables sous les $\pi(g)$ et $u_\omega^{\otimes n}$, et il est clair, toujours grâce à la commutation des $\pi(g)$ avec les $u_\omega^{\otimes n}$, que $\Theta_1^d \circ (\pi(g) \otimes \text{Id}) \circ \Theta_1^{d^{-1}}$ coïncide sur \mathcal{E}^d avec $\pi(g)$, et $\Theta_1^d \circ (\text{Id} \otimes u_\rho^{\otimes n}) \circ \Theta_1^{d^{-1}}$, avec $u_\rho^{\otimes n}$.

Il ne reste plus qu'à considérer le produit tensoriel Θ_2^d de deux $C^0(X)$ -isomorphismes trivialisant \mathcal{K}^d et \mathcal{H}^d en $C^0(X) \otimes K^d$ et $C^0(X) \otimes H^d$: alors $\Theta = \bigoplus \Theta_d = \bigoplus \Theta_2^d \circ \Theta_1^{d^{-1}}$ est l'isomorphisme recherché. On pose en particulier $u^d = \Theta_d u_{|\mathcal{E}^d}^{\otimes n} \Theta_d^{-1}$, et u_ν^d est alors une représentation irréductible de SU_ν d'après le corollaire 5.1 (minimalité de c_ν^d). //

Soit A la C^* -algèbre unifère engendrée par des éléments $_{ij}u$ ($1 \leq i, j \leq N$) et $f \in Z(A)$ de spectre X , avec les relations :

$$\forall l, m \quad \sum_{kl} {}_{kl}u^* {}_{km}u = \sum_{mk} {}_{mk}u {}_{lk}u^* = \delta_{lm} 1 \quad (38)$$

$$\forall (l_j) \quad \sum {}_{l_1 k_1}u \cdots {}_{l_N k_N}u E_{k_1, \dots, k_N}^f = E_{l_1, \dots, l_N}^f 1, \quad (39)$$

$$\text{où } E_{k_1, \dots, k_N}^f = \begin{cases} (-f)^{J(i \mapsto k_i)} & \text{si } (i \mapsto k_i) \text{ est une permutation,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Munie du morphisme $h \mapsto h(f)$ de $C^0(X)$ dans A (calcul fonctionnel), A est une $C^0(X)$ -algèbre stellaire. On identifie $C^0(X)$ à son image dans A , on note $C_\nu^0(X)$ son idéal fermé des fonctions nulles en ν , A_ν la C^* -algèbre $A/C_\nu^0(X)A$, et a_ν l'image de a dans A_ν . Alors A s'injecte canoniquement dans $\bigoplus A_\nu$: cf. [5, prop. 2.8]. La proposition suivante montre que A est l'objet approprié pour décrire le «champ des SU_ν », et que le «champ des coproduits Φ_ν » est continu.

Proposition 17 Soit $\Gamma : A \rightarrow A \otimes_{C^0(X)} A$ le morphisme de C^* -algèbres défini par $\text{Id} \otimes \Gamma(u) = u \oplus u$, $\text{Id} \otimes \Gamma(f) = f \otimes 1$. Munie du morphisme de C^* -algèbres induit $\Gamma_\nu : A_\nu \rightarrow A_\nu \otimes A_\nu$, A_ν est une C^* -algèbre de Hopf isomorphe à $(C^0(SU_\nu), \Phi_\nu)$. Γ est appelé **champ continu de coproduits** sur A .

// On note avec un tilde les générateurs de la C^* -algèbre $C^0(SU_\nu)$ introduite par la définition 13 et le théorème 4, et avec un indice ν l'image dans A_ν des générateurs de A . On va montrer qu'on peut définir un isomorphisme de C^* -algèbres $\Psi_\nu : A_\nu \rightarrow C^0(SU_\nu)$ par les égalités $\Psi_\nu(i_j u_\nu) = i_j \tilde{u}$ et $\Psi_\nu(f) = \nu$. A et $C^0(SU_\nu)$ étant des C^* -algèbres enveloppantes, le morphisme d'algèbres involutives Ψ défini par $\Psi(f) = \nu$, $\Psi(i_j u) = i_j \tilde{u}$, compatible avec les relations définissant A et SU_ν , se prolonge en un morphisme de C^* -algèbres de A dans $C^0(SU_\nu)$, qui se factorise à travers A_ν : si $h \in C^0(X)$ vérifie $h(\nu) = 0$, alors $\Psi(ha) = \Psi(h(f))\Psi(a) = h(\Psi(f))\Psi(a) = 0$ (compatibilité du calcul fonctionnel avec les morphismes de C^* -algèbres). Soit Ψ_ν le morphisme de C^* -algèbres de A_ν dans $C^0(SU_\nu)$ ainsi défini, il vérifie les égalités voulues et est surjectif car $C^0(SU_\nu)$ est engendrée par les $i_j \tilde{u}$. Mais les $i_j u_\nu$ engendrent aussi pour leur part la C^* -algèbre A_ν , et vérifient les relations définissant $C^0(SU_\nu)$ (par passage au quotient dans celles définissant A). Par définition de $C^0(SU_\nu)$ (comme C^* -algèbre enveloppante), il vient donc $\|a\| \leq \|\Psi_\nu(a)\|$ pour tout a dans A_ν , ce qui entraîne l'injectivité.

Intéressons-nous maintenant aux structures d'algèbres de Hopf : les formules $\text{Id} \otimes \Gamma(u) = u \oplus u$ et $\Gamma(f) = f \otimes 1 = 1 \otimes f$ définissent bien un morphisme de $C^0(X)$ -algèbres stellaires de A dans $A \otimes_{C^0(X)} A$ car $u \oplus u$ et $f \otimes 1$ vérifient les relations (38) et (39) dans $A \otimes_{C^0(X)} A$. Φ_ν est défini par la même formule dans $C^0(SU_\nu)$ (sans f). Donc Ψ_ν est un morphisme de C^* -algèbres de Hopf car c'est un morphisme de C^* -algèbres et $\Psi_\nu(u_\nu) = \tilde{u}$. //

On souhaite maintenant démontrer la continuité du «champ des $SU_\nu(N)$ », c'est-à-dire le fait que A soit un **champ continu de C^* -algèbres**. Des définitions équivalentes de cette notion sont données dans [5, th. 3.3] : continuité de $\nu \mapsto \|a_\nu\|$ pour tout a , existence d'un champ continu d'états fidèles, existence d'un champ continu de représentations fidèles. Tout champ continu de C^* -algèbres s'identifie ainsi à un sous-fibré d'un fibré vectoriel trivial $X \times K$. On va établir la deuxième propriété pour A , à l'aide du champ des mesures de Haar des SU_ν .

Proposition 18 Il existe un unique opérateur positif $C^0(X)$ -linéaire $h : A \rightarrow C^0(X)$, appelé **champ continu de mesures de Haar**, tel que $h_\nu \in A_\nu^*$ s'identifie pour tout $\nu \in X$ à la mesure de Haar de SU_ν .

// On considère dans cette démonstration des tableaux de Young $d \in \mathcal{Y}^N$ sans colonne pleine (y compris le tableau vide). Soit (e_i^d) une base de H^d (avec les notations du lemme 18.1), f^d un vecteur de K^d de norme 1, et n le nombre de cases de d . Notons $i_j e^d$ le coefficient de $u^{\oplus n}$ relativement à $\Theta_d^{-1}(f^d \otimes e_i^d)$ et $\Theta_d^{-1}(f^d \otimes e_j^d)$, éléments de $\mathcal{E}^d \subset \mathcal{E}$. D'après le lemme 18.1, $(i_j e_\nu^d)_{i_j}$ est pour tout ν une base de coefficients de u^d . En particulier $(i_j e^d)$ est $C^0(X)$ -libre dans A : les $i_j e_\nu^d$ sont libres dans A_ν (théorème 3) et $A \rightarrow \bigoplus A_\nu$ est injective (cf. [5, prop. 2.8] déjà citée). Soit \mathcal{A} le sous-module de A engendré par $\{i_j e^d\}$. \mathcal{A} contient f et les $i_j u$: considérer respectivement la représentation triviale u^{d_0} où d_0 est le tableau vide, et la représentation fondamentale u^d avec $d = \square$. \mathcal{A} est stable par multiplication : en effet $i_j e_{kl}^d e^{d'}$ est un coefficient de $u^d \otimes u^{d'}$ qui est contenue dans $u^{\oplus n + n'}$ (n et n' sont les nombres de cases de d et d'). \mathcal{A} est stable par conjugaison : en effet $i_j e_\nu^{d*}$ est pour tout ν un coefficient de \bar{u}_ν^d , qui est contenue dans $u_\nu^{\oplus (N-1)n}$ (car \bar{u}_ν est contenue dans $u_\nu^{\oplus N-1}$: cf. la démonstration du théorème 4), et le tableau de Young correspondant ne dépend pas de ν . Donc \mathcal{A} est dense dans A .

Il existe donc un unique champ continu de formes sur A , h , vérifiant $\forall d, i, j$ $h(i_j e^d) = \delta_{d=d_0}$. Il est clair d'après le théorème 3 que pour tout ν , h_ν est la mesure de Haar sur $A_\nu \simeq SU_\nu$, et l'unicité découle de l'unicité dans chaque fibre (théorème 1). //

Corollaire 18.1 A est un champ continu de C^* -algèbres sur X dont les fibres sont isomorphes aux SU_ν .

// Nagy a montré dans [29], par récurrence sur N , que la mesure de Haar de SU_ν est fidèle. Ainsi le champ h de la proposition 18 est un champ continu d'états fidèles sur

A , ce qui est une des caractéristiques des champs continus de C^* -algèbres : cf. [5, th. 3.3]. //

REMARQUE. Dans [5], A munie de Γ est appelée $C^0(X)$ -algèbre de Woronowicz, notion qui coïncide avec celle de champ continu d'unitaires multiplicatifs régulier de type compact (cf. aussi [1]). La continuité du champ de C^* -algèbres A y est établie de manière élémentaire dans le cas $N = 2$.

Bibliographie

- [1] Baaj (S.) et Skandalis (G.). – Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^* -algèbres. *Ann. Sci. ENS (4)*, vol. 26, 1993, pp. 425–488.
- [2] Banica (T.). – Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$. – preprint.
- [3] Bjorken (J.D.) et Drell (S.D.). – *Relativistic Quantum Mechanics*. – MacGraw-Hill, 1964.
- [4] Bjorken (J.D.) et Drell (S.D.). – *Relativistic Quantum Fields*. – MacGraw-Hill, 1965.
- [5] Blanchard (E.). – Déformations de C^* -algèbres de Hopf. *Bull. SMF*, vol. 124, 1996, pp. 141–215.
- [6] Boas (R.P.). – *Entire Functions*. – Acad. Press, 1954.
- [7] Bourbaki (N.). – *Éléments de Mathématiques*, chap. Théories Spectrales, I (Algèbres normées). – Hermann, 1967.
- [8] Bourbaki (N.). – *Éléments de Mathématiques*, chap. Théories Spectrales, II (Groupes localement compacts commutatifs). – Hermann, 1967.
- [9] Bourbaki (N.). – *Éléments de Mathématiques*, chap. Intégration, VII (Mesure de Haar). – Hermann, 1967.
- [10] Bourbaki (N.). – *Éléments de Mathématiques*, chap. Topologie Générale, IX (Utilisation des nombres réels en topologie générale). – Hermann, 1974, nouvelle édition.
- [11] Coleman (S.). – Quantum Sine-Gordon equation as the massive Thirring model. *Phys. Rev.*, vol. D11, 1975, p. 2088.
- [12] Coleman (S.). – *Aspects of Symmetry*. – Cambridge UP, 1985. selected Erice lectures.
- [13] Connes (A.). – Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 10, n3, 1993, pp. 223–234. – série générale.
- [14] Connes (A.). – Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, vol. 182, n1, 1996, pp. 155–176.
- [15] Connes (A.) et Chamseddine (Ali H.). – The spectral action principle. *Comm. Math. Phys.*, vol. 186, n3, 1997, pp. 731–750.
- [16] Connes (A.) et Kreimer (D.). – Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. – hep-th 9909126, septembre 1999.
- [17] Daele (A. Van) et Wang (S.). – Universal quantum groups. *Int. Jour. Math.*, vol. 7, n2, 1996, pp. 255–263.
- [18] Dixmier (J.). – *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. – Gauthier-Villars, 1964.
- [19] Drinfel'd (V.G.). – Quantum groups. In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. AMS, pp. 798–820.
- [20] Enock (M.) et Schwartz (J.-M.). – *Kac algebras and duality of locally compact groups*. – Springer, 1992.

- [21] Frenkel (I.B.). – Two constructions of affine Lie algebras representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory. *Jour. Funct. Anal.*, vol. 44, n3, 1981.
- [22] Godard (P.) et Olive (D.). – Algebras, lattices and strings. *In : Vertex Operators in Mathematics and Physics*. – Springer.
- [23] Goodman (F.M.), de la Harpe (P.) et Jones (V.F.R.). – Coxeter-Dynkin diagrams and towers of algebras. – preprint IHES.
- [24] Jimbo (M.). – A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the yang-baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, vol. 10, 1985, pp. 63–69.
- [25] Kac (V.G.). – *Infinite dimensional Lie algebras*. – Cambridge UP, 1990, troisième édition.
- [26] Kustermans (J.) et Vaes (S.). – A simple definition for locally compact quantum groups. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 328, 1999, pp. 871–876. – série I.
- [27] Maes (A.) et van Daele (A.). – Notes on compact quantum groups. *Nieuw Archief voor Wetenschap*, vol. 16, n1–2, 1998, pp. 73–112.
- [28] Mandelstam (S.). – Soliton operators for the quantized Sine-Gordon equation. *Phys. Rev.*, vol. D11, 1975, p. 3026.
- [29] Nagy (G.). – On the Haar measure of the quantum $SU(n)$ group. *Comm. Math. Phys.*, vol. 153, 1993, pp. 217–228.
- [30] Naimark (M.A.). – *Normed Algebras*. – Wolters-Noordhof, 1968, troisième édition.
- [31] Podleś (P.) et Woronowicz (S.L.). – Quantum deformation of Lorentz group. *Comm. Math. Phys.*, vol. 130, 1990, pp. 381–431.
- [32] Ramond (P.). – *Field Theory : a Modern Primer*. – Addison-Wesley, 1990, deuxième édition.
- [33] Rosso (M.). – Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple lie algebra. *Comm. Math. Phys.*, 1988.
- [34] Rosso (M.). – Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. *Duke Math. Jour.*, 1990.
- [35] Sakai (S.). – *C^* -Algebras and W^* -Algebras*. – Springer, 1971.
- [36] Segal (G.). – Jacobi's identity and an isomorphism between a symmetric algebra and an exterior algebra. – 1981. non publié.
- [37] Serres (J.-P.). – *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. – W.A. Benjamin, 1966.
- [38] Sugiura (M.). – *Unitary Representations and Harmonic Analysis — an Introduction*. – Wiley and Sons, 1975.
- [39] Sweedler (M.E.). – *Hopf Algebras*. – Benjamin, 1969.
- [40] Takesaki (M.). – *Theory of Operator Algebras*. – Springer, 1979.
- [41] Thirring (W.). – *Classical Dynamical Systems*. – Springer, 1978.
- [42] Thirring (W.). – *Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*. – Springer, 1981.
- [43] Wang (S.Z.). – Free products of compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, vol. 167, 1995, pp. 671–692.
- [44] Weyl (H.). – *The classical Groups*. – Princeton U.P., 1946, deuxième édition.
- [45] Woronowicz (S.L.). – Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, vol. 111, 1987, pp. 613–665.
- [46] Woronowicz (S.L.). – Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publ. RIMS*, vol. 23, 1987, pp. 117–181.

- [47] Woronowicz (S.L.). – Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(n)$ groups. *Invent. Math.*, vol. 93, 1988, pp. 35–76.
- [48] Woronowicz (S.L.). – Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups). *Comm. Math. Phys.*, vol. 122, 1989, pp. 125–170.
- [49] Woronowicz (S.L.). – A remark on compact matrix quantum groups. *Lett. Math. Phys.*, vol. 21, 1991, pp. 35–39.
- [50] Woronowicz (S.L.). – Unbounded elements affiliated with C^* -algebras and non-compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 1991.