17h20

Rappels

<u>Déf</u> C^*-algèbre d'un groupe quantique discret

① C^*-alg unifère S, coproduit $\delta : S \to S\otimes S$ coassociatif et bisimplifiable.

② Etat de Haar : $(h\otimes id)\delta = (id\otimes h)\delta = 1_S h$

③ C^*-alg réduite : image de S par la représentation GNS de h, $\lambda : S \to L(H)$

④ Co-unité : caractère continu $\varepsilon : S \to \mathbb{C}$ tel que $(\varepsilon\otimes id)\delta = (id\otimes \varepsilon)\delta = id$

⑤ Corepr. de dim finie : $u \in L(K)\otimes S$, $(id\otimes\delta)(u) = u_{12}u_{13}$
On note $u\otimes v = u_{13}v_{23}$, $\bar{u} = u^{(id\otimes *)}$, $\chi_u = (tr\otimes id)(u)$

⑥ $\mathcal{C}$ catégorie des corepr unitaires de dim finie
$\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ système de représentants des irréductibles

<u>Exemple</u> $S = C^*\Gamma$, Γ groupe discret. Pour $r\in\Gamma$ on note encore $r \in \mathbb{C}\Gamma \subset C^*\Gamma$.

① $\forall r$ $\delta(r) = r\otimes r$ (cocommutatif)

② $\forall r$ $h(r) = \delta_{e,r}$. $\langle r, r'\rangle_h = \delta_{r,r'}$

③ $S_r = C^*_r\Gamma$, $H = \ell^2(\Gamma)$, λ repr régulière

④ $\forall r$ $\varepsilon(r) = 1$

⑤, ⑥ $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C} = \{1_{\mathbb{C}}\otimes r \,/\, r\in\Gamma\}$

NB : qd Γ est commutatif, $S = C(G)$ avec $G = \hat{\Gamma}$ gpe compact, les corepns de S correspondent aux représentations de G : $L(K)\otimes S \simeq C(G, L(K))$. Cela reste vrai pr G compact non abélien : autre classe d'exemples

__Th__ Il existe un unique état de Haar. Thm de Peter-Weyl pour les corepr. Rel de Schur pour leurs coefficients. Structure de $(\mathfrak{S}\delta)$.
Particularités quantiques : on n'a pas nécessairement $u \otimes v \simeq v \otimes u$. u unitaire de $L(K) \otimes S$ $\not\Rightarrow$ $\bar{u}$ unitaire de $L(\bar{K}) \otimes S$: il faut changer la struct. hermitienne $K \rightsquigarrow \bar{K}$.
h n'est pas nécessairement tracial, mais il est KMS.

__Def__ Produit libre de C^*-algèbres. A_1, A_2 C^*-algèbres unifères. B sous-C^*-alg commune contenant $1_{A_1} = 1_{A_2} = 1$.
Espérances conditionnelles fidèles $P_i : A_i \to B$. Alors il existe un objet universel :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A_1 \arrow[d, hook] \arrow[ddr, bend left] & \\
A_2 \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right] & A_1 *_B A_2 \arrow[dr, dashed] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

$A_1 *_B A_2$ est engendrée par A_1 et A_2 ("mots en A_1 et A_2")

__Def__ Soit (E_i, η_i) construction GNS de P_i, $E_i^\circ = \eta_i^\perp$.

$$E_1 *_B E_2 = \eta B \oplus \bigoplus_{(i_k) \in I_n} E_{i_1}^\circ \otimes_B \cdots \otimes_B E_{i_n}^\circ \qquad (*)$$

$I_n = \{ (i_k) \in \{0,1\}^n \mid i_k \neq i_{k+1} \}$.

Alors $A_1 *_B A_2$ agit naturellement sur $E_1 *_B E_2$.
$\hookrightarrow$ η définit $P_1 *_B P_2 : A_1 *_B A_2 \to B$.
$\hookrightarrow$ image de $A_1 *_B A_2$ par cette repr. : $A_1 *_{B,r} A_2$.
Notation : $E(r,i)$ est la somme des termes de $(*)$ pour lesquels $i \neq i_n$ (y compris ηB).

Produits libres amalgamés

<u>Prop</u> Sous-groupes. On suppose S réduite.

① correspondance bijective entre (coefficients)

* sous-C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables $1_S \in T \subset S$
* sous-catégories pleines $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ tq $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, $1 \in \mathcal{D}$

② Il existe une unique espérance conditionnelle $P : S \to T$ tq $(\mathrm{id} \otimes P)\delta = (P \otimes \mathrm{id})\delta = \delta \circ P$

③ $h_T = h_{S|T}$, $h_S = h_T \circ P$, T est réduite.

En particulier on a une construction GNS E pour P ; si T a une co-unité ε alors $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ (construction GNS pour εP) est l'espace ℓ^2 des classes mod Δ.

<u>Exple</u> $\Delta \subset \Gamma$ sous groupe $\Rightarrow C^*_r \Delta \subset C^*_r \Gamma$. Espérance conditionnelle : $P(r) = \delta_{r \in \Delta} r$. Produit scalaire de $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$: $\langle r, r' \rangle = \varepsilon P(r^{-1} r') = \delta_{r^{-1} r' \in \Delta}$, donc on a bien $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C} = \ell^2(\Gamma / \Delta)$.

<u>Prop</u> [Wang] Si T est une sous-C^*-alg de Hopf bisimplifiable commune à S_1, S_2 et contenant 1, $S = S_1 *_T S_2$ est munie d'une structure de C^* alg de Hopf unique pour laquelle les inclusions $S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$ respectent les coproduits. S est alors bisimplifiable.

<u>Exple</u> $S_1 = C^* \Gamma_1$, $S_2 = C^* \Gamma_2$, $T = C^* \Delta \Rightarrow S = C^* \Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2 = C^* \Gamma$.
Soit $\bar{\Gamma}_i$ un système de représentants des classes mod Δ. Les éléments de Γ s'écrivent de manière unique comme produits $r_{i_1} \cdots r_{i_n} s$, $r_{i_k} \in \bar{\Gamma}_{i_k} \setminus \{1\}$, $s \in \Delta$, $(i_k) \in I_n$, $n \geq 0$.

Th [Wang] $T = \mathbb{C}$. La mesure de Haar de $S = S_1 * S_2$ est $h = h_1 * h_2$. On peut prendre pour $\operatorname{Irr} \mathcal{C}$: 1 et $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_n}$, $u_{i_k} \in \operatorname{Irr} \mathcal{C}_{i_k} \setminus \{1\}$, $(i_k) \in I_n$, avec les règles de fusion et de conjugaison "naturelles".

Th S_1, S_2 réduites. Si $S = S_1 *_T S_2$, l'espérance conditionnelle canonique $P : S_r \to T$ est donnée par $P \circ \iota = P_1 *_T P_2$. En particulier $h_S = h_T \circ (P_1 *_T P_2)$.

Pour les représentations, c'est vraiment plus compliqué : cf l'exemple à la fin.

Arbre de Serre

<u>Exemple</u> $\Gamma = \Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2$. On pose $X^0 = \Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$, $X^1 = \Gamma/\Delta$.
Une structure d'arbre orienté est donnée par
extr : $g\Delta \mapsto (g\Gamma_1, g\Gamma_2)$. A quoi ça ressemble ?
les élts de Γ/Δ s'écrivent de manière unique comme
produit $g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Delta$, $g_{i_k} \in \Gamma_{i_k} \setminus \{1\}$. Les élts de Γ/Γ_i
s'écrivent de manière unique $g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Gamma_i$,
$g_{i_k} \in \Gamma_{i_k} \setminus \{1\}$, $i_n \neq i$. [Dessin pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.]
L'orientation associée à extr ne s'éloigne ni ne
rapproche d'une quelconque origine. On voit sur le
dessin que l'orientation montante associée à l'origine
est donnée par l'application but suivante :

$$\text{but} : \begin{cases} g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Delta \mapsto g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Gamma_{i_{n+1}}, \; i_{n+1} \neq i_n \\ \Delta \mapsto \Gamma_2 \end{cases}$$

C'est alors un fait général que l'opérateur associé
au niveau ℓ^2 définit un élément de $KK(S, \mathbb{C})$ qui
réalise la K-moyennabilité de $\Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2$.

Considérons un produit libre amalgamé de C^*-algèbres de
groupes quantiques discrets, $S = S_1 *_T S_2$. On suppose S_1, S_2
moyennables : elles sont réduites et admettent une co-unité ε.

<u>Lemme</u> Soit $E = E_1 *_T E_2$ (c'est aussi la construction GNS
pour $P : S \xrightarrow{\text{can}} T$), et F_i la construction GNS de $S \xrightarrow{\text{can}} S_i$.
Alors l'application canonique $F_i \to E$ induit un
isomorphisme $F_i \otimes_\varepsilon \mathbb{C} \to E(2,i) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$.

<u>Def</u> Arbre de Serre et orientation de Julg-Valette.

① On pose $H = F_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \oplus F_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, $K_g = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. espaces l^2 des sommets et des arêtes, munis des repr naturelles de S ($G \curvearrowright S$).

② Opérateur but :

$$\Phi^* : \begin{cases} K_g \to H, \ \eta \otimes_{\mathbb{Z}} 1 \mapsto \eta_2 \otimes_{\mathbb{Z}} 1 \\ E(x_1, i)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} F_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \end{cases}$$

<u>Thm</u> S_1, S_2 et γ moyennables.

① Φ est un op. de Fredholm qui commute aux repr naturelles de S modulo les compacts.

② L'élt de $KK(S, \mathbb{C})$ associé est homotope à l'élt associé à la rep. triviale $\varepsilon : S \to \mathbb{C}$.

③ $S = S_1 *_\gamma S_2$ est K-moyennable. (9h05

Un Exemple

<u>Def</u> Soit $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tq $Q\bar{Q} \in \mathbb{C} I_n$. $S = A_o(Q)$: C^*-algèbre unifère engendrée par n^2 générateurs u_{ij} et les relations (u_{ij}) unitaire $Q(u_{ij}^*)Q^{-1} = (u_{ij})$.

<u>Prop</u> [Wang] Il existe une unique structure de C^*-algèbre de Hopf sur S pr laquelle (u_{ij}) est une corepresentation. S est alors biosimplifiable.

<u>Thm</u> [Banica] Thie des corepo : $\mathrm{Irr}\, \mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $v_0 = 1$, $u_1 = (u_{ij})$, $\overline{u_k} = u_k$ et les règles de fusion de $SU(2)$.

Il y a un seul "sous-groupe" non trivial : $A_o(Q)$ pair, sous-espace fermé engendré par les produits d'un nbre pair de u_{ij}, qui correspond à $\mathrm{Irr}\, \mathcal{D} = 2\mathbb{N} \subset \mathbb{N} = \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}$.

Question : théorie des représentations de $S *_{S_{pair}} S$?

<u>Prop</u> On note u (resp u') la rep fondamentale de S, vue comme premier (resp deuxième) facteur du prod.

① $u \otimes u'$ n'est pas irréduc, elle admet une unique sous-corep de dim 1 notée $1 \otimes a$, $a \in S$.

② $C^* a \simeq C^* \mathbb{Z}$: $S *_{S_{pair}} S$ contient un "vrai ss-gpe" isomorphe à $\mathbb{Z}$ $\{a^k\}$

③ On peut prendre $\mathrm{Irr}\, \mathcal{C} = \{a^k \otimes u_\ell \,/\, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}\}$ avec les règles de fusion et conjugaison "naturelles", plus : $a^k \otimes \alpha_\ell = \alpha_\ell \otimes a_{(-1)^\ell k}$.