

Roland VERGNIoux

## Graphes de Cayley des groupes quantiques libres et $KK$ -théorie

Toulouse, 31 mars 2003

### *i.* Introduction

- Opérateur de Julg-Valette associé à un arbre. On définit un opérateur  $F_g^*$  de l'espace  $\ell_2$  des arêtes géométriques du graphe vers l'espace  $\ell_2$  des sommets, de la manière suivante : étant donnée une arête géométrique, on choisit l'orientation « montante », c'est-à-dire celle qui s'éloigne de l'origine, et on prend son but : cela revient à associer à chaque arête son extrémité la plus éloignée de l'origine. Il est clair sur cette définition que  $F_g^*$  est injectif, et que son image est le sous-espace de  $H$  associé aux sommets distincts de l'origine.
- Si l'arbre est associé à un groupe libre, ce qui est le cas sur le dessin, on peut faire agir le groupe dessus : cela revient à déplacer l'origine. Cela ne change rien à la notion de « sommet le plus éloigné de l'origine », et donc à l'action de l'opérateur de Julg-Valette, sauf pour les arêtes qui sont entre l'ancienne et la nouvelle origine. Ces arêtes sont en nombre fini, cela revient à dire que l'opérateur de Julg-Valette commute à l'action d'un élément du groupe modulo les opérateurs compacts. C'est exactement ce qu'il faut pour définir un élément  $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ .
- À quoi ça sert ? Julg et Valette montrent que  $\gamma$  est homotope à l'élément unité de  $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . Cela permet de montrer la  $K$ -moyennabilité des groupes agissant sur les arbres avec des stabilisateurs moyennables, c'est à dire le fait que le morphisme de réduction  $\lambda : C_p^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$  induit un isomorphisme en  $K$ -théorie.
- La  $K$ -moyennabilité est une notion introduite par Cuntz pour ramener le calcul de la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre réduite d'un groupe libre à celui de la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre pleine. Le cas réduit avait en effet été calculé de manière technique et compliquée par Pimsner et Voiculescu, tandis que Cuntz avait un calcul très simple pour le cas plein. Le cadre géométrique de Julg et Valette permet d'obtenir la  $K$ -moyennabilité pour d'autres exemples de groupes intéressants : les produits libres amalgamés de groupes moyennables,  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , ...
- L'élément  $\gamma$  de Julg et Valette joue également un rôle dans la preuve de la conjecture de Baum-Connes pour certaines classes de groupes. Il peut ainsi s'écrire comme produit de Kasparov d'éléments « Dirac » et « dual-Dirac » : cf les travaux de Kasparov et Skandalis dans le cas des actions de groupes sur leurs immeubles de Bruhat-Tits.
- Objectif de l'exposé : construire des objets géométriques « quantiques » qui soient les analogues des arbres des groupes libres, les utiliser pour construire un élément  $\gamma$  de  $KK$ -théorie équivariante pour les groupes quantiques libres.

### *ii.* Plan de l'exposé

#### (a) Rappels

- groupes quantiques discrets
- exemples :  $A_u(Q)$ ,  $A_o(Q)$
- graphes de Cayley pour les groupes discrets

#### (b) Graphes de Cayley quantiques

- définitions
- cas des arbres
- image et noyau de  $F_g^*$

#### (c) Element $\gamma$ pour $A_o(Q)$

- espace  $H_\infty$
- représentation  $\pi_\infty$

## 1. Groupes quantiques discrets : $C^*$ -algèbres

- Cadre axiomatique :  $C^*$ -algèbre de Woronowicz, ie  $C^*$ -algèbre unifère munie d'un coproduit  $\delta : S \rightarrow S \otimes S$  coassociatif ( $(\delta \otimes \text{id})\delta = (\text{id} \otimes \delta)\delta$ ) et bisimplifiable ( $\delta(S)(1 \otimes S)$  et  $\delta(S)(S \otimes 1)$  denses dans  $S \otimes S$ ).
- Premier exemple : groupes compacts. Il justifie la terminologie de « groupe quantique compact », au sens de la géométrie non commutative, mais ce n'est pas l'exemple qui nous intéresse le plus.
- Exemple principal :  $C^*$ -algèbres des groupes discrets (réduites, pleines ou « entre les deux »). Elles sont cocommutatives, c'est-à-dire que leurs coproduits sont symétriques, et on obtient ainsi tous les groupes quantiques compacts cocommutatifs.
- Définition des coreprésentations de dimension finie. Elles forment une catégorie tensorielle avec involution : dans le cas des groupes compacts, cela correspond au produit tensoriel de représentations et aux représentations contragrédientes.
- On a une théorie de Peter-Weyl (décomposition en somme de coreprésentations irréductibles), on note  $\text{Irr } \mathcal{C}$  un système de représentants des coreprésentations irréductibles. En fait on sait reconstruire le groupe quantique à partir de la catégorie « concrète »  $\mathcal{C}$ , et on sait caractériser les catégories qui apparaissent ainsi : deuxième cadre axiomatique (dualité de Tannaka-Krein).
- Exemple : les coreprésentations irréductibles de  $C^*(\Gamma)$  s'identifient aux éléments du groupe  $\Gamma$ , le produit tensoriel et la conjugaison correspondent alors à la loi de groupe et à l'inverse. Dans ce cas les coreprésentations irréductibles sont toutes de dimension 1, et cela caractérise en fait le cas cocommutatif (les caractères du groupe quantique compact forment un groupe discret).
- Dans le cas général, on pensera donc parfois aux éléments de  $\text{Irr } \mathcal{C}$  comme aux points du groupe quantique discret considéré. Ces coreprésentations ne sont pas de dimension 1 en général, et le produit tensoriel de deux coreprésentations s'écrit comme une somme de coreprésentations irréductibles (« règles de fusion »).
- $C^*$ -algèbre duale : somme des algèbres de matrices associées aux coreprésentations irréductibles. On aura besoin des projecteurs centraux minimaux  $p_s$ . Dans le cas discret, on retrouve la  $C^*$ -algèbre des fonctions nulles à l'infini sur  $\Gamma$  et les fonctions caractéristiques des points de  $\Gamma$ .

## 2. Groupes quantiques discrets : objets hilbertiens

- Résultat central de la théorie : existence d'un état de Haar  $h$  sur  $S$ , ie un état invariant. La représentation GNS associée n'est pas fidèle en général : on note  $S_r$  son image, qui est encore une  $C^*$ -algèbre de Woronowicz. Par ailleurs la  $C^*$ -algèbre duale est également représentée (de manière fidèle) dans  $L(H)$  : cf la transformation de Fourier des groupes abéliens.
- Exemple : sur  $\mathbb{C}\Gamma$  l'état de Haar est nul sur les éléments  $g \neq e$ , et vaut 1 sur l'unité  $e$  de  $\Gamma$ . On retrouve la représentation régulière de  $\Gamma$  sur  $\ell^2(\Gamma)$ , la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\Gamma)$  et l'action par multiplication de  $C_0(\Gamma)$  sur  $\ell^2(\Gamma)$ . Les projecteurs  $p_s$  sont les projecteurs orthogonaux sur les fonctions caractéristiques dans  $\ell^2(\Gamma)$  des éléments de  $\Gamma$ .
- Unitaires multiplicatifs et systèmes de Kac. C'est un troisième cadre axiomatique : à tout groupe quantique on associe un unitaire « multiplicatif »  $V$  sur  $H \otimes H$  (ie vérifiant l'identité pentagonale), et un unitaire involutif  $U$  sur  $H$ . On dit que  $(H, V, U)$  est le système de Kac du groupe quantique compact. On peut caractériser les systèmes de Kac qui apparaissent ainsi, et reconstruire les groupes quantiques compacts associés. Je n'ai pas besoin de donner les constructions explicites pour cet exposé.
- Exemple :  $V$  et  $U$  sont donnés par des formules très simples qui reflètent la structure du groupe discret sous-jacent.

### 3. Groupes quantiques libres

- La  $C^*$ -algèbre pleine du groupe libre  $F_n$  est la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $n$  générateurs  $u_i$  et les relations « minimales », ie celles qui rendent les  $u_i$  unitaires. Les  $C^*$ -algèbres de Woronowicz « libres » sont définies de même par des générateurs et des relations « minimales ».
- Groupe quantique libre  $A_u(Q)$  : les  $n^2$  générateurs  $u_{ij}$  forment une matrice  $u$  et on demande qu'elle soit unitaire, ainsi que la matrice conjuguée  $\bar{u}$  (dans le cadre non commutatif la première condition n'implique pas la deuxième). On peut introduire un paramètre  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  pour déformer la deuxième condition. On obtient ainsi une  $C^*$ -algèbre de Woronowicz, avec un coproduit tel que  $u$  soit une coreprésentation de  $A_u(Q)$  (Wang, van Daele). On a une version « orthogonale »,  $A_o(Q)$ , pour laquelle on demande que  $Q\bar{u}Q^{-1}$  soit égale à  $u$ .
- La théorie des coreprésentations a été étudiée par Banica. Pour  $A_u(Q)$ , on peut indexer  $\text{Irr } \mathcal{C}$  par les mots en  $u$  et  $\bar{u}$ , de manière à avoir les règles de fusion et de conjugaison indiquées sur le transparent. Pour  $A_o(Q)$ , si on suppose que  $Q\bar{Q}$  est scalaire, on peut indexer  $\text{Irr } \mathcal{C}$  par  $\mathbb{N}$  de manière à avoir les mêmes règles de fusion et de conjugaison que pour  $SU(2)$ . Notons d'ailleurs que dans le cas  $n = 2$  on retrouve les groupes quantiques compact  $SU_q(2)$  de Woronowicz.

### 4. Graphes de Cayley classiques

- Énumérer les données.  $\Delta$  s'interprète comme l'ensemble des directions suivies par les arêtes. On a deux visions équivalentes. Dans les deux cas l'ensemble des sommets est  $\Gamma$  lui-même.
- Vision simpliciale : une arête est un couple  $(r, r')$  de sommets tel que  $r' = rs$  pour un certain  $s \in \Delta$ . On peut retourner les arêtes, et on dispose donc des notions d'orientation et d'arêtes géométriques.
- Vision « origine + direction » : une arête est simplement la donnée d'un point de départ dans  $\Gamma$  et d'une direction dans  $\Delta$ . On retrouve la vision précédente grâce à des applications origine et but. L'application de retournement se lit de manière particulière dans cette nouvelle formulation.
- Exemple : graphe de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , de  $F_2$  (figure).

### 5. Graphes de Cayley quantiques

- Les données : groupes quantiques discrets (divers objets associés), projecteur central de  $\hat{S}$  qui s'écrit comme somme de projecteurs centraux minimaux  $p_r$  sur un sous-ensemble fini  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$ . Conditions sur  $p_1$  analogues de celles sur  $\Delta$ .
- On généralise la version simpliciale du graphe de Cayley de manière naïve. On obtient un graphe classique, en remplaçant l'égalité  $r' = rs$  par une inclusion  $r' \subset r \otimes s$ . Grâce à la dualité de Jacobi, on a une application de retournement bien définie, on peut donc parler d'orientation et d'arêtes géométriques. Spécificités quantiques : on peut avoir  $r' \subset r \otimes s$  et  $r' \subset r \otimes s'$ , avec de la multiplicité. Pour garder une trace de ces phénomènes, on munit les arêtes d'une couleur (à valeurs dans  $\Delta$ ) et d'une multiplicité.
- On généralise la vision « origine + direction » au niveau des espaces  $\ell_2$ , dans l'esprit de la géométrie non commutative. Le sous-espace  $p_1 H$  est la somme des  $p_r H$  avec  $r \in \mathcal{D}$  et s'interprète comme l'espace  $\ell_2$  des directions : on pose  $K = H \otimes p_1 H$ . On définit un opérateur de retournement des arêtes par la formule indiquée sur le transparent, qui est en fait une généralisation naturelle de la formule algébrique  $\Theta(f)(r, s) = f(rs, s^{-1})$ . Une fois  $\Theta$  défini, on dispose d'un sous-espace des arêtes géométriques naturel  $K_g$ , qui est le noyau de  $\Theta - \text{id}$ . A la différence du cas classique,  $\Theta$  n'est plus involutif en général, ce qui signifie que lorsqu'on retourne deux fois une arête on ne retombe pas forcément sur l'arête de départ. C'est la principale nouveauté du cas quantique, comme on le verra dans la suite.

- Par ailleurs on peut définir des opérateurs origine et but : pour l’opérateur origine on tue simplement la deuxième composante du couple (origine, direction) à l’aide d’une forme linéaire  $\epsilon$  sur  $p_1H$ , et pour l’opérateur but on compose à droite par l’opérateur de retournement. Dans le cas classique  $\epsilon$  envoie  $\mathbb{1}_s$  sur 1 pour tout  $s \in \mathcal{D}$ , dans le cas quantique c’est la forme linéaire induite sur  $p_1H$  par la co-unité du groupe quantique compact. Enfin on dispose d’un opérateur extrémités de  $K$  dans  $H \otimes H$  qui contient  $O$  et  $B$  et n’est autre que la restriction de  $V$ .
- Le graphe quantique est muni de représentations du groupe quantique discret. Par définition,  $S_r$  agit sur  $H$ , et on la fait agir sur le premier facteur de  $K$ . Alors  $\Theta$ ,  $O$  et  $B$  commutent à  $S_r$ , et en particulier  $S_r$  agit sur  $K_g$ . Ce sont ces actions qui font du graphe quantique l’objet le plus intéressant pour la  $KK$ -théorie. Le graphe classique servira plutôt d’auxiliaire pour l’étude du graphe quantique — en particulier les hypothèses que nous serons amenés à faire porteront sur le graphe classique. On peut illustrer cette relation entre les deux graphes de la manière suivante : soit  $r \in \mathcal{C}$  un sommet du graphe classique, on pensera au sous-espace  $p_rH$  comme à l’espace d’un « sommet quantique »  $r$ .
- Exemple : graphe classique de  $A_u(Q)$ ,  $A_o(Q)$  (figure).

## 6. Orientation

- On suppose maintenant que le graphe classique associé à  $(V, p_1)$  est un arbre strict, c’est-à-dire que c’est un arbre lorsqu’on le munit de la structure additionnelle déjà évoquée. On choisit la représentation triviale  $1_{\mathcal{C}}$  comme origine du graphe classique, et on dispose d’une orientation associée  $\mathbf{a}_+$ , dite « des arêtes montantes ». Le fait que  $(\mathbf{a}, \mathbf{s})$  soit un arbre strict signifie alors que les arêtes n’ont pas de multiplicité, et qu’il y a au plus une arête montante pour chaque couleur / direction.
- On souhaite définir un sous-espace des arêtes montantes dans  $K$  : on procède pour cela de manière naïve, à partir de l’ensemble des arêtes montantes du graphe classique, du projecteur associé  $\sum_{(r,r') \in \mathbf{a}_+} (p_r \otimes p'_r)$  sur  $H \otimes H$ , et de l’opérateur extrémités quantique  $V$ . On note  $p_{\star+}$  le projecteur de  $K$  obtenu,  $p_{\star-}$  son complémentaire. Lorsqu’on retourne  $p_{\star-}$ , on obtient un nouveau projecteur  $p_{+\star} = \Theta^* p_{\star-} \Theta$  qui commute aux deux premiers. On appelle sous-espace des arêtes quantiques montantes  $K_{++} = p_{++}K$  avec  $p_{++} = p_{+\star} p_{\star+}$ . On note de la même manière  $p_{+-} = p_{+\star} p_{\star-}$ ,  $K_{+-} = p_{+-}K$ , ...
- On peut alors définir l’adjoint de l’opérateur de Julg-Valette par la formule  $F_g^* = Bp_{++}$  : il envoie en deux étapes une arête géométrique sur un sommet du graphe quantique, comme dans le cas classique. On va voir que c’est la première étape (choix de l’orientation montante) qui pose problème, à cause de la non-involutivité de  $\Theta$ . L’opérateur but restreint aux arêtes montantes se comporte ensuite comme dans le cas classique, comme le montre la proposition suivante ...

## 7. Image et noyau de $F_g^*$

- La restriction de  $B$  à  $K_{++}$  est injective et son image est  $(1 - p_0)H$ , comme dans le cas classique. De plus on peut montrer que  $Bp_{++}$  commute aux représentations de  $S_r$  modulo des opérateurs compacts. Cependant la situation est plus compliquée que dans le cas classique, où  $Bp_{++}$  commute à l’action d’un élément du groupe modulo un opérateur de rang fini.
- Pour étudier la projection de  $K_g$  sur  $K_{++}$ , on a besoin de mieux maîtriser la non-involutivité de  $\Theta$ , et on utilise un résultat d’involutivité affaiblie très utile dans les calculs : on retrouve l’involutivité lorsqu’on compresse par  $p_{++} + p_{--}$ . Dans le cas classique on a  $p_{\star+} = p_{+\star}$  si bien que les projecteurs  $p_{+-}$  et  $p_{-+}$  sont nuls, et  $p_{++} + p_{--} = \text{id}$ .
- On a alors un deuxième résultat : la restriction de  $p_{++}$  à  $K_g$  est injective, et on a une expression de son image (qui donne une expression de l’image de  $F_g^*$  dans

$(1 - p_0)H$ ). Il s'agit des vecteurs de  $K_{++}$  dont l'image par  $p_{+-}\Theta p_{++}$  est dans  $\text{Im}(\text{id} - p_{+-}\Theta p_{+-})$ . Dans le cas classique, cette condition est vide. Dans le cas quantique il faut étudier  $p_{+-}\Theta p_{+-}$  pour pouvoir l'exploiter.

- Regardons ce qui se passe dans la décomposition  $K = \sum (p_k \otimes \text{id})K$ . Dans le cas classique, si on retourne une arête montante partant de l'étage  $k$ , on obtient une arête partant de l'étage  $k + 1$ , mais nécessairement descendante. Dans le cas quantique, les arêtes de  $p_{+-}$  sont à la fois montantes et descendantes : lorsqu'on les retourne, on passe de l'étage  $k$  à l'étage  $k + 1$ , mais le résultat a encore une composante montante.
- Ainsi  $p_{+-}\Theta p_{+-}$  agit comme un shift vers la droite dans la décomposition : en retournant plusieurs fois une arête, on a en particulier des composantes qui partent à l'infini du graphe. Il faut néanmoins savoir quels sont les poids de ce shift, et pour cela on a besoin de se placer dans le cas particulier de  $A_o(Q)$  pour faire des calculs explicites.
- En fait ce n'est pas une vraie restriction. Tout d'abord, on peut voir que lorsque le graphe classique associé à  $(V, p_1)$  est un arbre strict, nécessairement  $V$  est un produit libre d'unitaires associés à des groupes quantiques libres  $A_u(Q)$  et  $A_o(Q)$ , et  $p_1$  est associé à l'ensemble de représentations fondamentales correspondant. En ce qui concerne  $A_u(Q)$ , toute la difficulté se concentre sur des sous-arbres quantiques isomorphes à celui de  $A_o(Q)$ . Il est très probable que le cas de  $A_u(Q)$  se traite comme celui de  $A_o(Q)$ , avec des écritures plus compliquées.

#### 8. Espace $H_\infty$ pour $A_o(Q)$

- Les calculs menés dans le cas de  $A_o(Q)$  montre que les poids du shift  $p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes \text{id})$  tendent rapidement vers 1 lorsque  $k$  tend vers l'infini. Il est alors naturel d'introduire la limite inductive  $H_\infty$  des  $(p_k \otimes \text{id})K_{+-}$ . Notons que la dimension croît à chaque étage, contrairement à ce qui se passe dans le cas classique, si bien que  $H_\infty$  est de dimension infinie. On utilise pour définir cette limite inductive la partie polaire  $T$  de  $p_{+-}\Theta p_{+-}$ , et on modifie en conséquence  $p_{+-}\Theta p_{++}$  (qui intervient dans l'expression de  $p_{++}K_g$ ) pour obtenir un opérateur  $S$ . On a des isométries canoniques de chaque sous-espace  $(p_k \otimes \text{id})K_{+-}$  dans la limite inductive  $H_\infty$ , et en sommant on obtient un opérateur non borné  $P$  de  $K_{+-}$  entier dans  $H_\infty$ .
- On se place dans le cas où  $\text{Tr } Q^*Q > 2$  — sinon, les coefficients du shift ne tendent pas assez vite vers 1. Cela revient à exclure les cas particuliers  $SU(2)$  et  $SU_{-1}(2)$ . Alors l'opérateur  $PS : K_{++} \rightarrow H_\infty$  a des propriétés très intéressantes : il est borné, surjectif, et son noyau a une expression très similaire à celle de  $p_{++}K_g$ . En fait on a exactement  $p_{++}K_g = \text{Ker } PS$ . Cela montre que  $p_{++}K_g$  est de codimension infinie dans  $K_{++}$ , mais fermé. Ainsi  $F_g^*$  n'est pas un opérateur de Fredholm, mais le devient si on lui rajoute  $BR^*$ .

#### 9. Représentation $\pi_\infty$ pour $A_o(Q)$

- Pour faire de la  $KK$ -théorie, on a besoin de munir  $H_\infty$  d'une représentation de  $S_r$ . Au vu de la définition de  $H_\infty$ , l'idée naturelle est de faire agir  $S_r$  sur chaque étage  $(p_k \otimes \text{id})K_{+-}$ , d'envoyer le résultat dans  $H_\infty$  à l'aide de  $P$ , puis de passer à la limite inductive. Pour cela, il faut que le résultat ne dépende pas de l'étage choisi. Soit  $\zeta \in H_\infty$  qui soit l'image de  $\zeta_l \in (p_l \otimes \text{id})K_{+-}$ ,  $\zeta_k \in (p_k \otimes \text{id})K_{+-}$  et  $\zeta_{k+1} \in (p_{k+1} \otimes \text{id})K_{+-}$ . On fait agir  $a \in S_r$  sur chacun de ces vecteurs et on envoie le résultat dans  $H_\infty$  : on obtient des vecteurs  $\xi_l, \xi_k, \xi_{k+1}$  dans  $H_\infty$ . S'il s'agissait du même vecteur de  $H_\infty$ , on aurait un bon candidat pour  $\pi_\infty(a)\zeta$ , mais ce n'est pas le cas : on peut vérifier par le calcul que le diagramme qui relie l'étage  $k$  à l'étage  $k + 1$  ne commute pas. Cependant, il commute de mieux en mieux lorsque  $k$  tend vers l'infini, et la suite  $\xi_k$  a une limite dans  $H_\infty$  que l'on note  $\pi_\infty(a)\zeta$ .
- On peut vérifier que cela définit un opérateur borné  $\pi_\infty(a)$ , et que l'on obtient ainsi

une représentation de  $S$ , et même de  $S_r$ , sur  $H_\infty$ . Avec tous les calculs déjà faits, il n'est pas très dur de voir que de plus  $R$  commute aux actions de  $S_r$  sur  $K_{++}$  et  $H_\infty$ . On obtient donc un élément de  $KK$ -théorie,  $\gamma \in KK_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , en considérant l'opérateur de Fredholm  $F_g^* + BR^* : K_g \oplus H_\infty \rightarrow H$ .