Roland Vergnioux

Graphes de Cayley des groupes quantiques libres

Paris, 11 juillet 2003

i. Introduction
- L'objet de l'exposé est de définir des objets hilbertiens qui peuvent s'interpréter comme les graphes de Cayley quantiques des groupes quantiques discrets, et d'étudier leur géométrie, notamment dans le cas des groupes quantiques libres et des arbres. Cette étude est motivée par les résultats à la Julg-Valette pour la K-théorie des groupes agissant sur des arbres.
- Opérateur de Julg-Valette associé à l'arbre d'un groupe libre : on définit un opérateur F_g^* de l'espace ℓ_2 des arêtes du graphe vers l'espace ℓ_2 des sommets, en associant à chaque arête son extrémité la plus éloignée de l'origine. Il est injectif, son image est le sous-espace de H associé aux sommets distincts de l'origine, et il commute à l'action d'un élément du groupe modulo les opérateurs compacts : cf l'exposé de Pierre Julg. Ce sont exactement les propriétés qui permettent de définir un élément $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
- À quoi ça sert ? Julg et Valette montrent que γ est homotope à l'élément unité de $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Cela permet de montrer la K-moyennabilité des groupes agissant sur les arbres avec des stabilisateurs moyennables, c'est à dire le fait que le morphisme de réduction $\lambda : C_p^*(G) \to C_r^*(G)$ induit un isomorphisme en K-théorie. L'homotopie est construite à l'aide de la fonction de type négatif donnée par la distance à l'origine dans le graphe.

ii. Plan de l'exposé

(a) Rappels sur les groupes quantiques
  - groupes quantiques compacts
  - groupes quantiques discrets
  - exemples : $A_u(Q)$, $A_o(Q)$

(b) Graphes de Cayley quantiques
  - graphes de Cayley classiques
  - graphes de Cayley quantiques

(c) Orientation montante
  - arêtes montantes
  - espace à l'infini

(d) Distance à l'origine
  - le cas classique : F_n
  - le cas quantique : $A_o(Q)$

1. Groupes quantiques compacts
- On a (au moins) trois cadres axiomatiques pour la théorie des groupes quantiques compacts, due initialement à Woronowicz. La formulation la plus simple se fait en termes de C^*-algèbres : les objets étudiés sont les C^*-algèbres de Woronowicz, c'est à dire les C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables.
- La théorie des représentations des groupes compacts se généralise avec la notion de coreprésentation des groupes quantiques compacts. On a une définition très simple en dimension finie : rappeler la notation des indices pour les produits tensoriels. La théorie est tout-à-fait analogue à celle des groupes compacts : on a des notions de morphisme d'entrelacement, somme directe, produit tensoriel, conjugaison. On notera $\mathcal{C}$ la catégorie des coreprésentations de dimension finie de (S, δ). On a un théorème de Peter-Weyl dans ce cadre : les coreprésentations se décomposent en sommes directes de coreprésentations irréductibles. On notera Irr $\mathcal{C}$ un système complet de représentants des coreprésentations irréductibles.

– Plusieurs objets hilbertiens interviennent également dans la théorie. Un résultat central est l'existence d'un état de Haar pour (S, δ). On note H l'espace L^2 correspondant, et λ la représentation GNS de S sur H. Cette dernière n'est pas fidèle en général, on note S_r son image : c'est la version « réduite » de S (le coproduit de S passe au quotient). On a une décomposition de H en sous-espaces de dimension finie associés aux éléments de Irr $\mathcal{C}$ (sous-espaces de coefficients), on notera p_r les projecteurs orthogonaux correspondants. Enfin, d'autres objets hilbertiens permettent de décrire entièrement le groupe quantique compact considéré, pour former le système de Kac (H, V, U) associé à (S, δ). On se contentera ici d'expliquer à quoi correspondent ces objets dans le cas des groupes discrets.

2. Le cas co-commutatif
   - On explique maintenant comment associer à un groupe discret quelconque (non abélien) un groupe quantique compact, que l'on peut considérer comme son dual de Pontrjagin généralisé. Soit Γ un groupe discret, on fait de $C^*\Gamma$ une C^*-algèbre de Woronowicz en définissant le coproduit par une formule très simple sur la base canonique de $\mathbb{C}\Gamma$.
   - On peut alors décrire les objets de la théorie en fonction de Γ. Le groupe des caractères forme un système complet de représentants des coreprésentations irréductibles, et il s'identifie au groupe Γ lui-même : en passant des groupes compacts aux groupes quantiques compacts, on permet aux groupes de caractères de devenir non abéliens.
   - L'espace de Hilbert H s'identifie à $\ell^2(\Gamma)$, λ est la représentation régulière gauche de Γ et $s_r = C^*_r\Gamma$. Les sous-espaces $p_r(H)$, pour $r \in \Gamma$, sont les droites engendrées par les fonctions caractéristiques des points de Γ. Enfin, les unitaires U et V sont donnés par des formules simples en fonction de la structure du groupe Γ (noter que $H \otimes H \simeq \ell^2(\Gamma \times \Gamma)$).
   - Dans le cas général d'un groupe quantique compact, on considérera donc dans la suite S comme la C^*-algèbre pleine d'un groupe quantique discret. Parfois il sera utile de penser aux éléments $r \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}$ comme aux « points » de ce groupe quantique discret. Si $\mathcal{D}$ est une partie de Irr $\mathcal{C}$, le projecteur somme des p_r pour $r \in \mathcal{D}$ est l'analogue quantique du projecteur sur le sous-espace $\ell^2(\mathcal{D}) \subset \ell^2(\Gamma)$ (écrire cette inclusion).

3. Groupes quantiques libres
   - Le groupe libre F_n est engendré par n générateurs sans relations, sa C^*-algèbre pleine est donc la C^*-algèbre engendrée par n générateurs u_i et les relations « minimales », ie celles qui rendent les u_i unitaires. Je vous laisse imaginer ce que peut être une C^*-algèbre engendrée par des générateurs et des relations, le point important est que les relations doivent imposer une borne aux générateurs. Les C^*-algèbres de Woronowicz « libres » sont définies de même par des générateurs et des relations « minimales ».
   - Groupe quantique libre $A_u(Q)$: les n^2 générateurs u_{ij} forment une matrice u et on demande qu'elle soit unitaire, ainsi que la matrice conjuguée $\bar{u}$ (dans le cadre non commutatif la première condition n'implique pas la deuxième). On peut introduire un paramètre $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ pour déformer la deuxième condition. On obtient ainsi une C^*-algèbre de Woronowicz, avec un coproduit tel que u soit une coreprésentation de $A_u(Q)$ (Wang, van Daele). On a une version « orthogonale », $A_o(Q)$, pour laquelle on demande que $Q\bar{u}Q^{-1}$ soit égale à u.
   - La théorie des coreprésentations a été étudiée par Banica. Pour $A_u(Q)$, on peut indexer Irr $\mathcal{C}$ par les mots en u et $\bar{u}$, de manière à avoir les règles de fusion et de conjugaison indiquées sur le transparent. Pour $A_o(Q)$, si on suppose que $Q\bar{Q}$ est scalaire, on peut indexer Irr $\mathcal{C}$ par $\mathbb{N}$ de manière à avoir les mêmes règles de fusion et de conjugaison que pour $SU(2)$. Notons d'ailleurs que dans le cas $n = 2$

on retrouve les groupes quantiques compact $SU_q(2)$ de Woronowicz.

4. Graphes de Cayley classiques
   - Énumérer les données. Δ s'interprète comme l'ensemble des directions suivies par les arêtes. On a deux visions équivalentes. Dans les deux cas l'ensemble des sommets est Γ lui-même.
   - Vision simpliciale : une arête est un couple (r, r') de sommets tel que $r' = rs$ pour un certain $s \in \Delta$. On peut retourner les arêtes, et on dispose donc des notions d'orientation et d'arêtes géométriques.
   - Vision « origine + direction » : une arête est simplement la donnée d'un point de départ dans Γ et d'une direction dans Δ. On retrouve la vision précédente grâce à des applications origine et but. L'application de retournement se lit de manière particulière dans cette nouvelle formulation.
   - L'opérateur de Julg-Valette $F_g^* : \ell^2(\mathfrak{a}_g) \to \ell^2(\mathfrak{s})$ se définit alors en deux étapes : choix de l'orientation qui s'éloigne de l'origine, dite « montante », puis application but.
   - Exemple : graphe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de F_2 (figure). Arêtes sans flèches : géométriques. Sur l'arbre du groupe libre on a mis une flèche sur chaque arête géométrique pour obtenir l'orientation « montante » de l'arbre relativement à l'origine e : les arêtes orientées s'éloignent de cette origine.
5. Graphes de Cayley quantiques
   - Les données : groupes quantiques discrets (divers objets associés), projecteur central de $\hat{S}$ qui s'écrit comme somme de projecteurs centraux minimaux p_r sur un sous-ensemble fini $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$. Conditions sur p_1 analogues de celles sur Δ.
   - On généralise la version simpliciale du graphe de Cayley de manière naïve. On obtient un graphe classique, en remplaçant l'égalité $r' = rs$ par une inclusion $r' \subset r \otimes s$. Grâce à la dualité de Jacobi, on a une application de retournement bien définie, on peut donc parler d'orientation et d'arêtes géométriques. Spécificités quantiques : notions de couleur et de multiplicité pour les arêtes, dont je n'ai pas le temps de parler.
   - On généralise la vision « origine + direction » au niveau des espaces ℓ_2, dans l'esprit de la géométrie non commutative. Le sous-espace $p_1 H$ s'interprète comme l'espace ℓ_2 des directions : on pose $K = H \otimes p_1 H$. On définit un opérateur de retournement des arêtes par la formule indiquée sur le transparent, qui est en fait une généralisation naturelle de la formule algébrique $\Theta(f)(r, s) = f(rs, s^{-1})$. Une fois Θ défini, on dispose d'un sous-espace des arêtes géométriques naturel K_g, qui est le noyau de $\Theta - \mathrm{id}$. A la différence du cas classique, Θ n'est plus involutif en général, ce qui signifie que lorsqu'on retourne deux fois une arête on ne retombe pas forcément sur l'arête de départ. C'est la principale nouveauté du cas quantique, comme on le verra dans la suite.
   - Pour relier l'espace des arêtes à celui des sommets, on utilise V comme opérateur extrêmités, et en particulier, en composant par $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)$ et $(\epsilon \otimes \mathrm{id})$ pour tuer le but ou l'origine, on obtient des opérateurs origine et but. Ici ϵ est la forme linéaire sur H par la co-unité du groupe quantique compact.
   - Le graphe quantique est muni de représentations du groupe quantique discret. Par définition, S_r agit sur H, et on la fait agir sur le premier facteur de K. Alors Θ, O et B commutent à S_r, et en particulier S_r agit sur K_g. Ce sont ces actions qui font du graphe quantique l'objet le plus intéressant pour la KK-théorie. Le graphe classique servira plutôt d'auxiliaire pour l'étude du graphe quantique — en particulier les hypothèses que nous serons amenés à faire porteront sur le graphe classique. On peut illustrer cette relation entre les deux graphes de la manière suivante : soit $r \in \mathcal{C}$ un sommet du graphe classique, on pensera au sous-espace $p_r H$ comme à l'espace d'un « sommet quantique » associé à r.

– Exemple : graphe classique de $A_u(Q)$, $A_o(Q)$ (figure).

6. Arêtes montantes
   – On suppose maintenant que le graphe classique associé à (V, p_1) est un arbre strict, c'est-à-dire que c'est un arbre lorsqu'on le munit de la structure additionnelle déjà évoquée. On choisit la représentation triviale $1_\mathcal{C}$ comme origine du graphe classique, et on dispose d'une orientation associée $\mathfrak{a}_+$, dite « des arêtes montantes ». Le fait que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ soit un arbre strict signifie alors que les arêtes n'ont pas de multiplicité, et qu'il y a au plus une arête montante pour chaque couleur / direction.
   – On peut tout de suite remarquer que lorsque le graphe classique associé à (V, p_1) est un arbre strict, nécessairement V est un produit libre d'unitaires multiplicatifs associés à des groupes quantiques libres $A_u(Q)$ et $A_o(Q)$, et p_1 est associé à l'ensemble de représentations fondamentales correspondant. Dans la suite on s'intéressera essentiellement au cas de $A_o(Q)$, sur lequel se concentrent les nouveautés du cas quantiques.
   – On souhaite définir un sous-espace des arêtes montantes dans K : on procède pour cela de manière naïve, à partir de l'ensemble des arêtes montantes du graphe classique, du projecteur associé $\sum_{(r,r')\in\mathfrak{a}_+}(p_r \otimes p'_r)$ sur $H \otimes H$, et de l'opérateur extrémités quantique V. On note $p_{\star+}$ le projecteur de K obtenu, $p_{\star-}$ son complémentaire. Lorsqu'on retourne $p_{\star-}$, on obtient un nouveau projecteur $p_{+\star} = \Theta^* p_{\star-} \Theta$ qui commute aux deux premiers. On appelle sous-espace des arêtes quantiques montantes $K_{++} = p_{++}K$ avec $p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}$. Dans le cas classique $p_{\star+} = p_{+\star} = p_{++}$. On note de la même manière $p_{+-} = p_{+\star}p_{\star-}$, $K_{+-} = p_{+-}K$ (nul dans le cas classique), ...

7. Orientation
   – On se place dans le cas de $A_o(Q)$, et on doit pour des raisons techniques exclure le cas où Tr $Q^*Q = 2$ (ie $SU(2)$ et $SU_{-1}(2)$). On se demande si K_{++} définit bien une orientation du graphe quantique, ie si $p_{++} : K_g \to K_{++}$ est inversible (bijection naturelle entre arêtes montantes et arêtes géométriques). On montre que la restriction de p_{++} à K_g est injective, et on a une expression de son image qui est triviale dans le cas classique mais pas en général : il s'agit des vecteurs de K_{++} dont l'image par $p_{+-}\Theta p_{++}$ est dans $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta p_{+-})$. En étudiant l'opérateur $p_{+-}\Theta p_{+-}$, on arrive à montrer que cet espace est fermé, mais de codimension infinie.
   – Pour énoncer ce résultat de manière plus précise, il faut introduire un espace H_∞ qui n'existe que dans le cas quantique. Il apparaît naturellement de la manière suivante : dans la décomposition $K = \sum (p_k \otimes \mathrm{id})K$, on remarque que $p_{+-}\Theta p_{+-}$ fait passer de l'étage k à l'étage $k+1$, et des calculs plus précis montrent que $p_{+-}\Theta p_{+-}$ agit effectivement comme un shift à droite. Il est donc naturel d'introduire la limite inductive H_∞ des $(p_k \otimes \mathrm{id})K_{+-}$ relativement à cet opérateur, c'est un espace de Hilbert de dimension infinie.
   – On peut alors construire un opérateur borné et surjectif $R : K_{++} \to H_\infty$, de manière naturelle mais non explicitée ici, dont le noyau correspond exactement à $p_{++}K_g$. Autrement dit, son adjoint R^* est injectif et a pour image l'orthogonal de $p_{++}K_g$. Ainsi on doit rajouter à K_g un sous-espace « à l'infini » pour obtenir des propriétés d'orientation convenables.
   – Cela permet de construire un élément $\gamma \in KK(S_r, \mathbb{C})$: en composant $p_{++} + R^*$ par B, qui est inversible de K_{++} dans $(1 - p_0)H$, on obtient un opérateur de Fredholm d'indice 1. Bien sûr, il faut également s'assurer que les propriétés de commutation avec les représentations de S_r sont bonnes, et en premier lieu définir une telle représentation sur H_∞.

8. Cocycles et fonctions de type négatif : cas classique
   – Il y a des liens généraux entre représentations affines, cocycles et fonctions de type négatif, que je n'ai pas le temps de présenter en détail ici. Si π est une représentation unitaire d'un groupe Γ dans un espace de Hilbert H, un π-cocycle

est une application c de Γ dans H qui vérifie la condition indiquée. Cela équivaut à dire que c est la partie « translation » d'une représentation isométrique affine α de Γ dont la partie vectorielle est π. Illustrons cela par un exemple concernant le graphe de Cayley d'un groupe libre, que l'on peut considérer au niveau des sommets ou au niveau des arêtes, comme suit.

- Dans l'espace ℓ^2 des sommets, on considère le sous-espace affine engendré par les vecteurs δ_g de la base canonique (combinaisons barycentriques finies) : il est stable pour la représentation régulière, en restreignant cette dernière on obtient donc une représentation isométrique affine. Le λ-cocyle associé vaut $c_1(g) = \lambda(g)\delta_e - \delta_e$. En fait, pour rester cohérent dans la suite avec notre choix de considérer les arêtes géométriques comme des vecteurs symétriques, on doit considérer plutôt les vecteurs $(-1)^{|g|}\delta_g = D(\delta_g)$ et la conjuguée de λ par l'opérateur « degré » D. (On note $|g|$ la longueur du mot réduit de g.)
- Dans l'espace ℓ^2 des arêtes orientées, ce n'est plus la représentation affine qui apparaît de manière naturelle, mais le cocycle associé. Ainsi, soit $(a_1, ..., a_n)$ l'unique chemin conduisant du somment e au sommet g, on définit $c_2(g)$ comme la somme alternée des δ_{a_i}, où on pose $\delta_a = (\delta_{(x,y)} + \delta_{(y,x)})/\sqrt{2}$ pour une arête géométrique $a = \{x, y\}$. C'est un cocyle pour $\lambda'\otimes 1$, car $(B + O)$ entrelace cette représentation avec λ' et envoie c_2 sur $\sqrt{2}\, c_1$.
- Pour tout cocycle c d'un groupe Γ, la fonction $\varphi : g \mapsto ||c(g)||^2$ définit une fonction (conditionnellement) de type négatif sur Γ : on a $\varphi(e) \geq 0$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)$ et $\sum \bar{\lambda}_i\lambda_j\varphi(g_i^{-1}g_j) \leq 0$ si $\sum \lambda_i = 0$ — en fait toutes les fonctions de type négatif sont des carrés de normes de cocycles. En appliquant cela aux deux version du cocyle construit précédemment pour le groupe libre, on obtient deux fonctions de type négatif complètement différentes car les structures hilbertiennes en jeu sont différentes. La première fonction est trivialement de type négatif (vérifier la définition), tandis que la seconde, donnée par la distance à l'unité dans le graphe de Cayley, permet de montrer que F_n a la propriété de Haagerup, et intervient dans la construction de l'homotopie entre l'élément γ pour F_n et 1.

9. Cocycle et fonction de type négatif pour $A_o(Q)$
   - La première question est de savoir comment généraliser les notions de cocycles et de fonctions de type négatif pour les groupes quantiques discrets, de manière à maintenir le lien entre les deux. Pour cela on utilise la sous-*-algèbre de Hopf dense $\mathcal{S}$ de la C^*-algèbre du groupe discret, qui est l'analogue de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\Gamma$. Elle est munie en particulier d'une co-unité et d'une antipode, qui généralisent la mesure de comptage et l'inverse du groupe Γ.
   - Un cocyle relativement à une représentation $\pi : S \to L(H)$ est une application linéaire $c : \mathcal{S} \to H$ telle que $c(1) = 0$ et qui vérifie la relation de cocycle $c(xy) = \pi(x)c(y) + \varepsilon(y)c(x)$. L'analogue du carré de la norme de c est alors une forme linéaire sur $\mathcal{S}$ définie à l'aide du produit scalaire de H et du coproduit de $\mathcal{S}$. Lorsque le carré de l'antipode est égal à 1, la proposition affirme que cette forme linéaire est de type négatif : $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(x^*x) = 0$ pour $x \in \mathrm{Ker}\ \varepsilon$.
   - Ce cadre permet de généraliser la fonction de type négatif sur F_n donnée par la distance à l'origine dans le graphe de Cayley. La stratégie est de définir le cocyle au niveau de l'espace des sommets, où les propriétés à vérifier sont triviales, puis de le ramener dans l'espace des arêtes à l'aide de $B + O$. On doit donc d'abord étudier cet opérateur, et on se rend compte qu'il est effectivement injectif sur K_g, et que son image contient les valeurs du cocycle « trivial » c_1.
   - On obtient ainsi un cocycle à valeur dans K_g qui donne une notion de chemin vers l'origine dans le graphe de Cayley quantique, puis la fonction de type négatif associée qui donne une notion de distance à l'origine dans ce graphe.