Espace des arêtes à l'infini

Au niveau algébrique, le cas quantique présente deux particularités principales :
* $\Theta^2 \neq 1$ * $p_{+*} \neq p_{*+}$

On a une proposition reliant retournement et orientation :
Prop $\Theta p_{+*} (p_n \otimes id) = (p_{n+1} \otimes id) p_{*-} \Theta$

On peut alors voir que les particularités quantiques de l'orientation et du retournement sont liées. D'une part, p_{++} et p_{--} se comportent comme des projecteurs semi-classiques (résultat "algébrique") :
Thm $\forall n$ $(p_{++} + p_{--}) \Theta^{n} (p_{++} + p_{--}) = (p_{++} + p_{--}) \Theta^{-n} (p_{++} + p_{--})$.
D'autre part la proposition ci-dessus donne une première idée du comportement de Θ sur p_{+-} et p_{-+} :
$$\Theta (p_n \otimes id) p_{+-} = (p_{n+1} \otimes id) p_{+-} \Theta$$
Ainsi, dans la décomposition de K_{+-} donnée par la distance à l'origine, Θ se comporte comme un opérateur de translation à droite. C'est fortement non-involutif !

Pour étudier cette particularité quantique, il est naturel de poser la définition suivante :
Def $K_\infty = \varinjlim ((p_n \otimes id) K_{+-}, r)$ avec $r = p_{+-} \Theta p_{+-}$
$R_n : (p_n \otimes id) K_{+-} \xrightarrow{can} K_\infty$, $R = \sum R_n : K_{+-} \to K_\infty$
(R est non borné, non fermable, mais c'est néanmoins une notation pratique.) K_∞ est une limite inductive d'espaces de Hilbert, mais où les morphismes ne sont pas isométriques a priori, seulement contractifs. On pourrait donc

avoir $K_\infty = 0$, même si $(p_n \otimes \mathrm{id})K_{+-}$ est non nul pour tout n. (Dans le cas quantique, les dimensions de ces sous-espaces forment une suite strictement croissante.)

Il faut donc étudier les morphismes r, et pour cela on doit introduire une nouvelle famille de projections q_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$ qui commute à Θ, R_{+*}, R_{*+}, $(p_n \otimes \mathrm{id})$: on décompose la situation en une somme directe orthogonale de situations analogues mais plus simples. Ces projections sont les images des p_ℓ par une représentation de $\hat S$ sur K_+ provenant de la rep. canonique de $\hat S^{\otimes 4}$ sur $H \otimes_R H$ ($\hat S$ agit à gauche et à droite sur chaque facteur). La décomposition donnée par les q_ℓ est effectivement intéressante : pour tous n, ℓ $r(p_n \otimes \mathrm{id})q_\ell$ est multiple d'une isométrie et

<u>Lemme</u> $\|(p_n \otimes \mathrm{id}) r q_\ell\| = \sqrt{1 - \frac{m_\ell m_{n+1}}{m_n m_{n-1}}}$ avec m_ℓ = q-dim H_ℓ.

Ici H_ℓ est l'espace de la ℓ-ième corepr. irréductible de $A_o(Q)$. Dans les cas unimodulaires, qui sont déjà intéressants, on a q-dim H_ℓ = dim H_ℓ, et en particulier (m_ℓ) croît arithmétiquement ou géométriquement. NB : ce lemme s'obtient par des calculs d'angles dans la catégorie des corereprésentations de $A_o(Q)$.

<u>Cor</u> Les R_n sont injectifs, et en particulier dim $K_\infty = +\infty$.

L'étape suivante est la construction d'une représentation du groupe quantique discret sur l'espace de Hilbert K_∞. On dispose déjà d'une représentation de $\hat S$ provenant de la repr sur K compatible avec le système inductif évoqué ci-dessus. Pour S, c'est plus compliqué. On part de l'action sur K, bien qu'elle ne soit pas compatible avec le système identif, on peut espérer que le diagramme suivant ait un sens :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\Xi_{n-1}}{\Downarrow}\hspace{-0.5em}(\rho_{n-1}\otimes id)K_{+-} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\not\circlearrowleft"] & \underset{\Xi_n}{\Downarrow}\hspace{-0.5em}(\rho_n\otimes id)K_{+-} \arrow[r, "R_n"] \arrow[d, "p_{+-}(a\otimes 1)p_{+-}"] & \overset{\Xi}{\Downarrow}K_\infty \arrow[d, dashed, "\pi_\infty(a)\,?"] \\
K_{+-} \arrow[r, "="] & K_{+-} \arrow[r, "R"] & K_\infty
\end{tikzcd}$$

Malheureusement l'image de Ξ_n dans K_∞ dépend de n, ce qui revient à dire que le diagramme de gauche ne commute pas. Cependant, une étude plus poussée (analytique) montre qu'il commute "à l'infini" et on peut en déduire que la suite Ξ_n converge dans K_∞.

On a plus précisément le théorème suivant :

<u>Thm</u> Soit $\Xi \in (\rho_k\otimes id)K_{+-}$ et $a \in \mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}$. La suite $(R\, p_{+-}(a\otimes 1)p_{+-}\tau^k\Xi)$ converge vers un vecteur de K_∞ qui ne dépend que de $R\Xi$ et qu'on appelle $\pi_\infty(a)R\Xi$. Cela définit un opérateur borné $\pi_\infty(a) \in L(K_\infty)$, et un morphisme d'algèbres involutives $\pi_\infty : \mathcal{S} \to L(K_\infty)$. Il s'étend par continuité à S (et même S_∞).

NB : Dans ma thèse ce théorème n'était démontré que pour le cas de $A_0(Q)$, avec des restrictions sur Q. Il est en fait vrai en toute généralité. La démonstration est assez technique (on utilise le même genre de décomposition et d'estimations de normes que plus haut). On dispose ainsi finalement d'un véritable objet géométrique purement quantique : l'espace de Hilbert K_∞ muni de représentations des C^*-algèbres duales S et $\hat{S}$.

Application : corriger un défaut de l'arbre de Cayley quantique, la non-surjectivité de $p_{++} : K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - id) \longrightarrow K_{++}$. Dans le cas classique, cette (restriction de) projection est bijective : cela correspond au fait qu'il y a exactement une arête ascendante par arête non-orientée. Dans le cas quantique il n'y a plus assez d'arêtes géométriques : cela est lié à la non-involutivité de Θ.

Prop Soit $s = p_{+-}\Theta p_{++} : K_{++} \to K_{+-}$. Alors $(R_s)^* : K_{oo} \to K_{++}$ est une isométrie et $p_{++}K_g \perp \mathrm{Im}(R_s)^*$. Plus précisément :

$$p_{++}K_g = \{\xi \in \mathrm{Ker}\, R_s \mid (\|R_n^{-1} R_s p_{K_{n-}} \xi\|) \in \ell^2\}$$

<u>Thm</u> On a $p_{++}K_g = \mathrm{Ker}\, R_s$, sauf dans 3 cas "dégénérés" où $p_{++}K_g$ est strictement dense dans $\mathrm{Ker}\, R_s$: $A_u\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A_o\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ et $A_o\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = C(SU(2))$.

NB. Dans ma thèse, ce thm n'est démontré que dans le cas des $A_o(Q)$ non dégénérés.

La correction de ce défaut est l'une des étapes principales de la construction de l'élément γ pour les groupes quantiques libres :

<u>Thm</u> L'opérateur $B(p_{++} + (R_s)^*) : K_g \oplus K_{oo} \to H$ est de Fredholm et son indice vaut 1. Il définit un élément $\gamma \in KK(S_n, \mathbb{C})$.

NB : la deuxième partie du théorème est une assertion de commutation modulo les compacts par notre opérateur et nos représentations de S. A nouveau, les choses se passent moins bien que dans le cas classique (cependant sans nouveauté conceptuelle). Dans le cas classique, le commutateur de p_{++} avec un générateur du groupe libre est de rang 1. Dans le cas quantique, il est toujours compact mais pas de rang fini.