① Rappels

Transparent "produit libre de C^*-algèbre"

Exemple : Γ_1, Γ_2 groupes discrets. A chaque $r \in \Gamma_i$ correspond $r \in C^*_r\Gamma_i$.

Δ sous-gpe commun à Γ_1, Γ_2 : $C^*\Delta \subset C^*\Gamma_i$, $C^*_r\Gamma \subset C^*_r\Gamma_i$, esp. condit. canoniques $P_i : C^*_r\Gamma_i \to C^*_r\Delta$ données par $P_i(r) = 0$ si $r \notin \Delta$, et $P_i(r) = r$ sinon.

Alors $C^*\Gamma_1 *_{C^*\Delta} C^*\Gamma_2 = C^*(\Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2)$, $C^*_r\Gamma_1 *_{C^*_r\Delta, r} C^*_r\Gamma_2 = C^*_r(\Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2)$.

On peut décrire $\Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2$ à l'aide de systèmes de représentants des classes modulo Δ : $\overline{\Gamma}_i$. Les élts de $\Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2$ s'écrivent de manière unique $r_{i_1} \cdots r_{i_n} s$ avec $n \geq 0$, $(i_k) \in I_n$, $r_{i_k} \in \overline{\Gamma}_{i_k}$, $s \in \Delta$.

Transparent "groupes quantiques discrets"

Exemple. $S = C^*\Gamma$, $\delta(r) = r \otimes r$ (mais aussi $S = C^*_r\Gamma$).

Alors $h(r) = \delta_{r,e}$, $S_r = C^*_r(\Gamma)$ (donc si $S = C^*_r\Gamma$ h est fidèle), $\varepsilon(r) = 1$ pour tout r.

Les corepresentations irréductibles de $C^*_r\Gamma$ sont de dimension 1 et s'identifient aux éléments de Γ :

$$r \in \Gamma \rightsquigarrow \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes r \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \otimes S \text{ corep.}$$

Dans le cas quantique, il faut penser à $\mathcal{C}$ comme à la catégorie des représentations d'un groupe compact (sous-corepresentation, équivalence, irréductibilité, produit tensoriel ...).

② Mesures de Haar, coreprésentations

S_1, S_2, T C^*-algèbres de gpes qtiques discrets
Inclusions unifères $T \subset S_1, S_2$ compatibles avec les coproduits
$S = S_1 *_T S_2$

<u>Prop</u> [Wang] S est muni d'un unique coproduit qui étend ceux de S_1 et S_2. S est alors la C^*-algèbre d'un gpe qtique discret.
<u>Prop</u> [Wang] $T = \mathbb{C}$. La mesure de Haar de $S = S_1 * S_2$ est $h = h_1 * h_2$. On peut prendre pour $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ les $u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_n}$ avec $n \geq 0$, $(i_k) \in I_n$, $u^{i_k} \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}_{i_k} \setminus \{1\}$.

<u>Prop</u> On suppose S_1, S_2 réduites. Alors T est réduite et on dispose d'esp. cond. uniques $P_i : S_i \to T$ tq $h_T \circ P_i = h_{S_i}$. De plus $h_S = h_T \circ (P_1 *_T P_2)$, la C^* alg réduite de $S_1 *_T S_2$ est $S_1 *_{T,r} S_2$.

Pour les coreprésentations, la situation est plus compliquée que dans le cas classique.
Exemple : considérons le groupe quantique discret qui est le dual de $SU(2)$, ie $S = C(SU(2))$ muni du coproduit
$$\delta(f)(r,s) = f(rs) \qquad (C(X) \otimes C(X) = C(X \times X)).$$
En considérant la théorie des coreps de S, càd la théorie des représentations de $SU(2)$, on se rend compte que (S, δ) a un unique ss-gpe qtique discret propre : $T = C(SO(3)) \subset S$.
Etudions le produit libre amalgamé $S *_T S$. On note u (resp. u') la corep. fond. de S, vu comme premier (resp. second) facteur du produit libre : u provient de l'appl. tautologique $(SU(2) \to L(\mathbb{C}^2)) \in C(SU(2), L(\mathbb{C}^2)) \simeq$
$\simeq L(\mathbb{C}^2) \otimes C(SU(2))$.

Prop i) $u \otimes u'$ n'est pas irréductible, elle admet une unique sous-corep de dim 1, $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes a$ avec $a \in S *_T S$.

ii) $C^* a \simeq C^* \mathbb{Z}$: $S *_T S$ contient un "vrai" sous-gpe isomorphe à $\mathbb{Z}$

iii) $S *_T S$ est engendré par une copie de S et $C^* \mathbb{Z}$, on a $u_{ij} a = a^{-1} u_{ij}$ (u_{ij} gén. de S).

NB : Tout cela est vrai plus généralement lorsque $S = A_o(Q)$ avec $Q\bar{Q} = I_n$. Le cas de $SU(2)$ correspond à $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un autre cas, trivial, est celui de $Q = (1)$: on retrouve alors $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par l'inversion de $\mathbb{Z}$).
Dans le cas $Q = I_n$ l'unique ss-gpe propre T s'identifie à un des gpes qtques $A_{aut}(M_n)$ de Banica.

Par contre les choses se passent mieux au niveau des T-modules hilbertiens E, E_i associés aux espérances conditionnelles de S, S_i sur T. Plus précisément on a une décomposition orthogonale de E en sous-modules $E_{i_1}^{\alpha_1} \otimes_T \cdots \otimes E_{i_n}^{\alpha_n}$ où $E_i = \bigoplus_\alpha E_i^\alpha$ est une décomposition indexée par certaines "classes de coreps, $\alpha \in$ "$\mathrm{Irr}\, \mathcal{C}_i / \mathcal{D}$".

Relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_i$ (coreps de S_i) induite par $\mathcal{D}$ (coreps de T) $\rightsquigarrow$ décomp $E_i = \bigoplus \{E_i^\alpha, \alpha \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}_i / \mathcal{D}\}$ $\rightsquigarrow$ décomp $E = \bigoplus E_{i_1}^{\alpha_1} \otimes_T \cdots \otimes_T E_{i_n}^{\alpha_n}$,
$\alpha_k \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}_{i_k} / \mathcal{D}$, $(i_k) \in I_n$.

③ Arbre de Bass-Serre

Cas classique. $\Gamma = \Gamma_1 *_\Delta \Gamma_2$. On pose $X^0 = \Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$ (sommets) et $X^1 = \Gamma/\Delta$ (arêtes), et on définit une structure d'arbre orienté sur (X^0, X^1) à l'aide d'une applica° extrémités

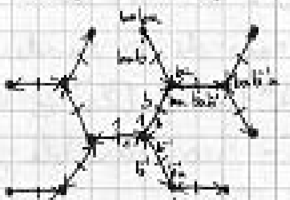
$$\mathrm{extr} : g\Delta \mapsto (g\Gamma_1, g\Gamma_2)$$

A quoi ça ressemble ?

Eléments de Γ/Δ : $g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Delta$, $g_{i_k} \in \overline{\Gamma_{i_k}} \setminus \{1\}$.

Eléments de Γ/Γ_i : $g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Gamma_i$, $g_{i_k} \in \overline{\Gamma_{i_k}} \setminus \{1\}$, $i_n \neq i$. (*)

Cas de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:



$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, a\}$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{1, b, b^2\}$

• mod $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

+ mod $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Choisissons $1 \in \Gamma/\Gamma_1$ comme origine, on peut donner une autre application extrémités qui correspond à l'orientation "montante" :

$$\mathrm{extr}' : \begin{cases} g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Delta \mapsto (g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Gamma_{i_n}, g_{i_1} \cdots g_{i_n} \Gamma_{i_{n+1}}) & i_{n+1} \neq i_n \\ \Delta \mapsto (\Gamma_i, \Gamma_j) & j \neq i \end{cases}$$

Pour donner une généralisation quantique, on se place au niveau des espaces hilbertiens associés à ces objets.
Soit $S = S_1 *_T S_2$ un produit libre amalgamé de GQD gques discrets moyennables. Soit $R : S \to T$, $R_i : S \to S_i$ les espérances conditionnelles canoniques, $E = E_1 *_T E_2$ et F_i les espaces GNS associés.

<u>Lemme</u> L'applica° canonique $F_i \to E$ induit un isomorphisme $F_i \otimes_T \mathbb{C} \to E(r, i) \otimes_T \mathbb{C} \subset E \otimes_T \mathbb{C}$

Cas classique : produit scalaire dans $F_i \otimes_T \mathbb{C}$

$$\langle r, r' \rangle = \varepsilon(R_i(r^* r')) = \delta_{r^* r' \in \Gamma_i}$$

Donc $F_i \otimes_T \mathbb{C} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_i)$. Or le lemme équivaut à (*).

Déf Arbre de Bass-Serre et orienté de Julg-Valette

1) $H = F_1 \otimes_\Sigma \mathbb{C} \oplus F_2 \otimes_\Sigma \mathbb{C}$, $K = E \otimes_\Sigma \mathbb{C}$, munis des repns GNS de S

2) $\Phi_i : H \to K$, $1_j \otimes_\Sigma 1 \mapsto \eta \otimes_\Sigma 1$, $1_i \otimes_\Sigma 1 \mapsto 0$ $\quad (j \neq i)$

$F_k^\circ \otimes_\Sigma \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} E(1,k)^\circ \otimes_\Sigma \mathbb{C} \quad (k = 1,2)$

Th 1) les repns de S sur H et K sont faiblement contenues dans la régulière.

2) $\Phi_i : H \to K$ est Fredholm et commute aux repns de S modulo les cpcts $\rightsquigarrow x \in KK(S_r, \mathbb{C})$.

3) $\lambda^*(x) = [\Sigma] \in KK(S, \mathbb{C})$, ie S est K-moyennable.