① Les groupes quantiques discrets

On ne va pas présenter la ou les axiomatiques, mais plutôt passer en revue les objets en présence, en expliquant ce qu'ils représentent dans le cas "classique" des groupes quantiques discrets.

- algèbre de Hopf $(S, \delta, \kappa, \varepsilon)$
- poids de Haar et espace ℓ^2
- C^*-algèbre de Hopf duale et transformée de Fourier

Globalement, la situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
c_0\Gamma \quad (S,\delta) \arrow[rr, dashed, "\mathcal{F}"] \arrow[dr] & & (\hat{S}_r, \hat{\delta}_r) \quad C^*_r\Gamma \arrow[dl] \\
& L(\mathcal{H}) & \\
& \ell^2\Gamma &
\end{tikzcd}$$

On dispose également d'une injection continue :

$$\hat{S}_r \hookrightarrow \mathcal{H}, \ \hat{a} \mapsto \hat{a}\xi_0$$

② La propriété RD

L'objet intéressant de la théorie, du point de vue de la théorie des représentations ou de la géométrie non commutative, est la C^*-algèbre $\hat{S}_r$, qui encode de nombreuses informations sur (S, δ). L'objet de la propriété RD est de contrôler sa norme (norme d'opérateurs) par des normes hilbertiennes très simples. Elle permet d'extraire une sous-algèbre dense $\mathcal{H}^\infty \subset \hat{S}_r$ qui a la même K-théorie mais est plus simple à manipuler dans certains contextes.

Avant toute chose il faut introduire la notion de longueur sur un groupe quantique discret, pour pouvoir quantifier la notion de "décroissance rapide".

<u>Def</u> Une longueur sur (S,δ) est un multiplicateur non borné $L \in S^{\eta}$ tq $L \geq 0$, $\varepsilon(L)=0$, $K(L)=L$ et

$$\delta(L) \leq 1 \otimes L + L \otimes 1.$$

On note alors $p_n \in M(S)$ le proj. spectral de L pr $[n, n+1[$.

<u>Rque</u> les multiplicateurs non bornés de $S = \bigoplus L(H_\alpha)$ s'identifient aux suites (non bornées) de $\prod L(H_\alpha)$. Ils forment dans ce cas très particulier une algèbre inv.

<u>Exple</u> Dans le cas classique, les longueurs sont les fonctions $l : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ symétriques, nulles sur l'élément neutre, et vérifiant l'inégalité triangulaire. p_n : sphères.

<u>Exple</u> Supposons que (S,δ) est de type fini : $\mathcal{J}$ est engendré (pour le produit tensoriel et l'inclusion) par un sous-ensemble fini $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{J}$. Posons

$$l(\alpha) = \min\{k \mid \exists \beta_1, \dots, \beta_k \ \ \alpha \subset \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k\}$$

pour $\alpha \in \mathcal{J}$, puis $L = \sum l(\alpha)\, id_\alpha$. C'est une longueur centrale sur (S,δ), dite longueur des mots relativement à $\mathcal{D}$.

<u>Def</u> Soit L une longueur sur (S,δ). On pose pour $a \in \mathcal{S}$ $\|a\|_2 = h_\rho(a^*a)^{1/2}$, $\|a\|_{2,s} = \|(1+L)^s a\|_2$. On appelle H^s la complétion de $\mathcal{S}$ relativement à $\|\cdot\|_{2,s}$, c'est un sous espace de H pour $s \geq 0$, et un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_{2,s}$. On pose aussi $H^\infty = \bigcap_{s \geq 0} H^s$ (espace de Fréchet). $H^s \hookrightarrow H \hookrightarrow \hat{S}_2$.

Prop Soit L une longueur centrale sur (S,δ). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists C, s > 0 \ \forall a \in S \quad \|\mathcal{F}(a)\|_{L(H)} \leq C \|a\|_{2,s}$

ii) $H^\infty \subset \hat{S}_2$ (comme sous-espaces de H)

iii) $\exists P \in \mathbb{R}[X] \ \forall k, l, n, a \in p_n S$

$$\|p_l \mathcal{F}(a) p_k\|_{L(H)} \leq P(n) \|a\|_2 \qquad (*)$$

On dit alors que (S, S, L) a la propriété de décroissance rapide (propriété RD). La caractérisation $(*)$ est aussi appelée inégalité de Haagerup, elle est apparue pour la première fois dans un article célèbre de Haagerup sur les algèbres de convolution des groupes libres. La définition et l'étude générale de la prop RD pour les groupes discrets sont dues à Jolissaint.

Rque Dans le cas de type fini, toute longueur est dominée par la longueur des mots et donc l'assertion i) pour une longueur éventuellement non centrale implique la même assertion pour une longueur centrale.

③ Survol des applications et du cas moyennable

Thm Si (S, δ, L) a la prop RD, H^∞ est en fait une sous-algèbre dense de $\hat{S}_2$ et $i_*: K(H^\infty) \to K(\hat{S}_2)$ est un isomorphisme [Jolissaint dans le cas classique]

Thm Si (S, δ, L) a la prop RD, pour s assez grand H^s est une sous-algèbre dense de $\hat{S}_2$ qui a la même K-théorie [V. Lafforgue dans le cas classique]

Ces résultats ont notamment été utilisés, dans le

cas "classique", par Vincent Lafforgue pour son approche de la conjecture de Baum-Connes via la KK-théorie Banachique. Le second théorème est plus intéressant de ce point de vue car H^s est naturellement une algèbre de Banach, alors que H^∞ n'est qu'une algèbre de Fréchet.

<u>Def</u> L longueur centrale sur (S,δ). On dit que (S,δ,L) est à croissance polynômiale s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall n$ $\ln_R(p_n) \leq P(n)$.
Par ailleurs, rappelons que (S,δ) est dit moyennable si $(\hat{S}_r, \hat{\delta})$ admet une co-unité continue (i.e. la repr triviale du GQD se factorise à travers la régulière).

<u>Thm</u> i) Si (S,δ,L) est à croissance polynômiale alors (S,δ,L) a la prop RD.
ii) Si (S,δ) est moyennable et (S,δ,L) a RD alors (S,δ,L) est à croissance polynômiale.

On dispose donc d'un critère très simple pour la propriété RD dans le cas moyennable. Cela s'applique en particulier aux duaux des groupes compacts.
<u>Cor</u> Les duaux des groupes de Lie compacts connexes ont la propriété RD.
Dans ce cas on peut en fait vérifier que $H^\infty = C^\infty(G)$, $\hat{S}_r = C(G)$, et les H^s sont des espaces de Sobolev.

⑥ Les groupes quantiques libres

La meilleure manière de définir les groupes quantiques libres est sans doute de définir la C^*-algèbre duale pleine $\hat{S}$ par générateurs et relations, puis un coproduit (évident) sur $\hat{S}$ qui en fasse un groupe quantique compact (Wang, van Daele). Ici nous nous contenterons de donner quelques précisions sur la théorie des représentations de S, qui a été déterminée par Banica.

Pour $\hat{A}_u(I_N)$, on peut prendre $J = \{$mots en u et $\bar{u}\}$ $\simeq \mathbb{N}*\mathbb{N}$, avec $\emptyset \leftrightarrow \varepsilon$, $\dim u = \dim \bar{u} = N$, et les règles de fusion récursives

$$\alpha u \otimes u \alpha' = \alpha u u \alpha', \quad \alpha u \otimes \bar{u} \alpha' = \alpha u \bar{u} \alpha' \oplus \alpha \otimes \alpha'.$$

Cela détermine $S = \oplus L(H_\alpha)$ et, au moins partiellement, le coproduit δ.

Pour $\hat{A}_o(I_N)$ on peut prendre $J = \mathbb{N}$ avec $\varepsilon = \alpha_0$, $\dim \alpha_1 = N$ et $\alpha_k \otimes \alpha_\ell = \alpha_{|k-\ell|} \oplus \cdots \oplus \alpha_{k+\ell-2} \oplus \alpha_{k+\ell}$.

Ces groupes quantiques discrets admettent des déformations intéressantes, paramétrées par des matrices $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ qui remplacent I_N. Ce sont par ailleurs les candidats naturels pour un analogue quantique du théorème classique de Hadamard sur les groupes libres.

Notons $p_\alpha = id \in L(H_\alpha) \subset S$. On a ainsi $p_n = \sum \{p_\alpha \mid l(\alpha) = n\}$ (dans le cas d'une longueur des mots).

Rappelons la 3e caractérisation de la prop RO : l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tq

$\forall k, l, n \ \forall a \in p_n S \ \| p_l \mathcal{F}(a) p_k \|_{L(H)} \leq P(n) \|a\|_2$.
Par définition, on obtient une condition plus faible en remplaçant p_k, p_l, p_n par $p_\beta, p_\gamma, p_\alpha$ avec $l(\alpha, \beta, \gamma) = n, k, l$: c'est un point de vue local où on considère un point sur chaque sphère plutôt que les sphères entières. En outre il est facile de voir que pour $a \in p_\alpha S$, $p_\gamma \mathcal{F}(a) p_\beta \neq 0 \Rightarrow \gamma \subset \beta \otimes \alpha$. On se restreint de plus au cas où cette inclusion n'a pas de multiplicité : on obtient comme condition nécessaire l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall \gamma \subset \beta \otimes \alpha$ sans mult.

$$\forall a \in p_\alpha S \quad \| p_\gamma \mathcal{F}(a) p_\beta \| \leq P(l(\alpha)) \|a\|_2 \qquad (*)$$

<u>Prop</u> $(*)$ équivaut à : $\forall a \in L(H_\alpha) \ \forall b \in L(H_\beta)$

$$\| \delta(p_\gamma)(b \otimes a) \delta(p_\gamma) \|_2 \leq \sqrt{\frac{m_\gamma}{m_\alpha m_\beta}} P(l(\alpha)) \|b \otimes a\|_2$$

<u>Rque</u> Cette CN concerne la géométrie des règles de fusion de (S, δ). On a $b \otimes a \in L(H_\beta \otimes H_\alpha)$ et $\delta(p_\gamma)$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $H_\beta \otimes H_\alpha$ équivalent à H_γ. Il s'agit donc de comparer la position relative du sous-espace H_γ et du cône des tenseurs décomposables de $H_\beta \otimes H_\alpha$. De plus $\|\cdot\|_2$ s'identifie à une norme de Hilbert-Schmidt sur $L(H_\beta \otimes H_\alpha)$, beaucoup plus simple qu'une norme d'opérateur.

<u>Rque</u> Dans le cas classique cette CN est triviale car $H_\gamma, H_\beta, H_\alpha$ sont de dimension 1. Il s'agit donc d'un problème spécifiquement quantique.

Dans le cas particulier des groupes quantiques libres on a

<u>Prop</u> Pour $\hat{A}_o(Q)$, $\hat{A}_u(Q)$, cette CN est une CS.

Dans le cas orthogonal, cette proposition est triviale car les sphères sont de cardinal 1. Dans le cas unitaire c'est l'analogue quantique du théorème de Haagerup, elle repose sur les propriétés combinatoires de $\mathcal{F} = \mathbb{N} * \mathbb{N}$ (au lieu de $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$).

On a enfin le résultat suivant, qui fait appel à des résultats assez techniques sur la géométrie des règles de fusion "à l'infini":

<u>Thm</u> Pour $\hat{A}_o(I_N)$ et $\hat{A}_u(I_N)$, la CNS précédente et donc la propriété RD, sont vérifiées.

Ce résultat est en fait valable pour tous les groupes quantiques libres unimodulaires. En fait, aucun GQD non-unimodulaire ne vérifie la propriété RD.

On a néanmoins des généralisations faisant intervenir le groupe modulaire de $\hat{G}$, qui sont vérifiées par tous les groupes quantiques libres