Toulouse 15/02/2005

Introduction.

Le point de départ de cet exposé sera un article célèbre de Haagerup : "An example of a nonnuclear C^*-algebra which has the metric approximation property", Inventiones Mathematicae 1979. L'objet de cet article était d'établir des propriétés d'approximation pour certaines algèbres de convolution des groupes libres — et notamment un contre-exemple à l'équivalence CPAP (nucléarité) $\Leftrightarrow$ MAP pour les C^*-algèbres.
Mais ce qui va nous intéresser plus précisément aujourd'hui, ce sont deux propriétés "intermédiaires" de la "longueur des mots" dans les groupes libres, qui ont été étudiées par la suite pour d'autres groupes et ont trouvé d'autres applications.

① Inégalité de Haagerup, ou Propriété de Décroissance Rapide : notant $S_n = \{\alpha \in \mathbb{F}_2 \mid l(\alpha) = n\}$ on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\forall a : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{C} \quad \operatorname{Supp} a \subset S_n \Rightarrow$$
$$(\|a\|_2 \leq) \ \|a\|_{cov} \leq P(n) \|a\|_2$$

où $\|\cdot\|_{cov}$ est la norme d'opérateur pour l'action par convolution de a sur $\ell^2(\mathbb{F}_2)$.

Cette propriété donne un moyen de contrôler la C^*-norme de $C^*_r \mathbb{F}_2$, objet riche mais difficile d'accès, par des normes hilbertiennes, très simples. En travaillant un petit peu, on parvient ainsi

à exhiber une sous-algèbre de Banach $H^s \subset C_r^* \Gamma$ qui a la même K-théorie mais est "plus simple" sous certains rapports (c'est une complétion inconditionnelle de $C_c(\Gamma)$). Cela a notamment été utilisé par V. Lafforgue dans son approche de la conjecture de Baum-Connes via la KK-théorie bornologique.

② Propriété de Haagerup, ou "A-T-menability" dans la terminologie de Gromov : la longueur des mots sur $\mathbb{F}_n$ est une fonction qui tend vers $+\infty$ à l'infini et est conditionnellement de type négatif : pour toute $a : \Gamma \to \mathbb{C}$ à support fini tq $\sum a(\alpha) = 0$,

$$\sum \overline{a(\alpha)}\, a(\beta)\, \ell(\alpha^{-1}\beta) \leq 0$$

Cette propriété permet de construire une action de Γ "métriquement propre" sur un espace de Hilbert affine. C'est l'ingrédient principal de la preuve par Higson de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes "A-T-moyennables".

Rappels : groupes quantiques discrets

Partant d'un groupe discret Γ on considère la C^*algèbre $S = c_0(\Gamma)$, elle est munie d'un coproduit $\delta : S \to M(S \otimes S) = c_b(\Gamma \times \Gamma)$ qui provient de la loi de Γ :

$$\delta(a) = [(\alpha, \beta) \mapsto a(\alpha\beta)]$$

Dans le cas d'un groupe quantique discret, on se donne également une C^*-algèbre munie d'un coproduit vérifiant quelques axiomes. S n'est plus commutative : ce n'est plus une algèbre de fonctions sur un espace sous-jacent. Cependant toutes les représentations irréductibles de S sont de dim finie : on peut écrire

$$S = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{J}} L(H_\alpha)$$

où $\mathcal{J}$ est l'ensemble des reps irréductibles de S (à équivalence près) et H_α est l'espace de α. Dans le cas classique $\mathcal{J} = \Gamma$ et $\forall \alpha \; H_\alpha = \mathbb{C}$. Dans le cas général $\mathcal{J}$ est muni d'une "opération" qui généralise la loi de Γ est est reliée au coproduit :

$$\alpha \otimes \beta := (\alpha \otimes \beta) \circ \delta = \sum_{\gamma \in \mathcal{J}} n_{\alpha\beta}^{\gamma} \, \gamma$$

Autres objets de la théorie :

inverse de Γ $\rightsquigarrow$ antipode $\kappa : S \to S$

$\rightsquigarrow$ conjugaison $\alpha \to \overline{\alpha}$

mesure de comptage sur Γ

$\rightsquigarrow$ poids de Haar h_R, h_L sur S

$\rightsquigarrow$ dim quantique $m_\alpha^2 = h_R(id_\alpha)$

unité de Γ $\rightsquigarrow$ co-unité $\varepsilon : S \to \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ rep triviale $\varepsilon \in \mathcal{J}$

Exemple 1 : dual de G, groupe compact. Dans ce cas $S = C^*(G)$, $\mathcal{J}$ est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G.

Exemple 2 : le groupe quantique libre $\hat{A}u(I_N)$. Alors $\mathcal{J} \simeq \mathbb{N} * \mathbb{N}$ (mots en u et $\bar{u}$) de telle manière que : $\emptyset = \varepsilon$, $\deg u = \deg \bar{u} = N$,

$$\alpha u \otimes u \alpha' = \alpha u u \alpha', \quad \alpha u \otimes \bar{u} \alpha' = \alpha u \bar{u} \alpha' \oplus \alpha \otimes \alpha'.$$

Cela permet de déterminer S et donne des renseignements sur S.

Longueur classique

<u>Def</u> Une longueur (classique) sur (S,δ) est un multiplicateur non borné $L \in S^1$ tq $L \geq 0$, $\varepsilon(L)=0$, $K(L)=L$ et $\delta(L) \leq L \otimes 1 + 1 \otimes L$. On appelle $p_n \in M(S)$ le proj. spectral de L relativement à $[n, n+1[$.

<u>Rque</u> Dans ce cas, les multiplicateurs non bornés de $S = \bigoplus L(H_\alpha)$ sont les éléments de $\prod L(H_\alpha)$. Dans le cas classique ce sont donc des fonctions $L : \Gamma \to \mathbb{R}_+$. L'inégalité triangulaire $\delta(L) \leq 1 \otimes L + L \otimes 1$ s'écrit $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ $L(\alpha\beta) \leq L(\alpha) + L(\beta)$.

<u>Exple</u> On suppose que le groupe quantique discret considéré est de type fini : $\mathcal{J}$ est engendré par un sous-ensemble fini $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{J}$. Alors le graphe de Cayley classique de (S,δ) est donné par l'ensemble de sommets $\mathcal{J}$ et l'ensemble d'arêtes

$$\{(\alpha,\beta) \in \mathcal{J}^2 \mid \exists \gamma \in \mathcal{D} \ \ \beta \subset \alpha \otimes \gamma\},$$

il est connexe. La distance à l'origine ε dans ce graphe définit une fonction $l : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_+$ puis une longueur centrale sur (S,δ) :

$$L = \sum d(\alpha, \varepsilon)\, id_{H_\alpha}$$

Dans le cas de $\hat{A}_u(I_N)$ muni de $\mathcal{D} = \{u, \bar{u}\}$, le graphe de Cayley ressemble à celui de $\mathbb{F}_2$ et l est la longueur des mots dans le monoïde libre $\mathbb{N} * \mathbb{N}$.

<u>Lemme</u> Soit L_0 une longueur des mots sur (S,δ). Pour tout autre longueur L il existe $C \geq 0$ tq $L \leq C \cdot L_0$. $\rightsquigarrow$ longueurs centrales suffisantes !

Exemple d'utilisation de ce type de longueur : croissance polynômiale, décroissance rapide

<u>Def</u> On dit que (S, δ, L) est à croissance polynômiale s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall n \; h_R(p_n) \leq P(n)$.

<u>Rque</u> Dans le cas classique $h_R(p_n) = \#\{\alpha \in \Gamma \mid l(\alpha) \in [n, n+1[\}$. Dans les cas quantique il y a une donnée de plus à maîtriser : (S, δ, L) est à crois. poly. ssi les deux suites suivantes le sont :

$$s_n = \#\{\alpha \in J \mid l(\alpha) \in [n, n+1[\}$$
$$M_n = \mathrm{Max}\{m_\alpha \mid l(\alpha) \in [n, n+1[\}.$$

<u>Ex</u> Si G est un groupe de Lie compact connexe, $\hat{G}$ est à croissance polynômiale : en effet on peut supposer que l est la restriction à $J = X_+$ d'une norme invariante sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, il est alors évident que (s_n) est à croissance poly. et pour (M_n) cela résulte de la formule des dimensions de H. Weyl :

$$\dim \alpha = \prod_{\beta \in R_+} \frac{\langle \rho + \alpha, K_\beta \rangle}{\langle \rho, K_\beta \rangle}.$$

En revanche, les q-déformations de ces duaux, comme $\widehat{SU_q(N)}$, n'ont pas une croissance polynômiale, "à cause de" (M_n). $\hat{A}_u(I_N)$ n'est pas à croissance polynômiale "à cause de" (s_n) et (M_n).

<u>Prop</u> Si (S, δ, L) est à croissance polynômiale alors (S, δ) est moyennable et (S, δ, L) a la propriété de décroissance rapide.

<u>Prop</u> Si (S, δ, L) a la propriété de décroissance rapide alors il existe une sous-algèbre de Banach $H^\infty \subset \hat{S}_r$ qui est une complétion inconditionnelle

de $\mathcal{S}$ et a la même K-théorie que $\hat{\mathcal{S}}_r$.

<u>Thm</u> $S = \hat{A}_u(Q)$ a la propriété de décroissance rapide : il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\forall n \ \forall a \in p_n \mathcal{S} \quad \|a\|_* \leq P(n) \|a\|_2$$

Ce résultat est l'analogue quantique du premier résultat de Haagerup évoqué dans l'introduction.

Longueur quantique.

La notion de positivité (ou de négativité conditionnelle) des fonctions concerne l'algèbre de convolution $\mathbb{C}\Gamma$ plutôt que l'algèbre des fonctions $\Gamma(\mathbb{C})$. Les deux sont canoniquement en dualité et agissent sur $\ell^2(\Gamma)$.
Cette situation perdure dans le cas quantique :

$$\begin{tikzcd} S \supset \mathcal{S} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \hat{\mathcal{S}} \subset \hat{S}_r \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & L(H) & \end{tikzcd}$$

Une fonction L sur Γ est conditionnellement de type négatif si $\forall x \in \operatorname{Ker} \hat{\varepsilon} \ \langle L, x^* x \rangle \leq 0$, où $\hat{\varepsilon} : \mathbb{C}\Gamma \to \mathbb{C}$ est définie par $\hat{\varepsilon}(\sum \lambda_\gamma \gamma) = \sum \lambda_\gamma$.
Cette notion est reliée à celle de cocycle (ou de représentation affine).

<u>Def</u> Soit π une rep. de la C^*-alg $\hat{S}_r$ sur un esp. de Hilbert K. Un π-cocycle est une application linéaire $c : \hat{\mathcal{S}} \to K$ tq $c(1) = 0$ et $\forall x, y \in \hat{\mathcal{S}}$

$$c(xy) = \pi(x) c(y) + \varepsilon(y) c(x).$$

(Il est dit réel si $\forall x \in \mathcal{S} \ (c(\hat{K}(x^*)) \mid c(\hat{K}(x)^*))_K \in \mathbb{R}$.)

<u>Prop</u> Si c est un π-cocycle réel, alors $\varphi = (\cdot \mid \cdot)_K \circ (c \otimes c) \circ (* K \otimes id) \circ \delta$ est cdt de type négatif (cauchy de la norme du cocycle).

Le résultat de Haagerup ne se généralise pas à la longueur des mots sur les groupes quantiques libres :

<u>Rque</u> Soit L la longueur des mots sur $\hat{A}_u(I_N)$, relativement à $\mathcal{D} = \{u, \bar{u}\}$. Alors $\langle L, \cdot \rangle$ n'est pas cdt de type négatif.

Cela est relié au fait que $\hat{S} = A_u(I_N)$ n'agit pas sur le graphe de Cayley classique introduit plus haut. En effet dans le cas de F_2, la longueur est la fonction associée (par la prop. précédente) au "cocycle chemin" pour l'action par translation de F_2 sur l'espace ℓ^2 des arêtes du graphe de Cayley.

<u>Thm</u> Il existe un "graphe de Cayley quantique" pour $\hat{A}_u(I_N)$, défini au niveau des espaces ℓ^2, sur lequel $\hat{S} = A_u(I_N)$ agit, et une application chemin de $\hat{S}$ vers l'espace des arêtes non orientées qui est un cocycle. La forme linéaire associée sur $\hat{S}$ (ou l'élément correspondant de $\mathcal{M}(\hat{S})$) est appelée longueur quantique de $\hat{A}_u(I_N)$. Elle reste largement à étudier.

Le graphe de Cayley quantique est défini par les "espaces de fonctions" sur les sommets S et sur les arêtes orientées $S \otimes_{\mathbb{1}} S$, qui sont munis des applications oriqine et but $\mathcal{O} = \mathrm{id} \circ \hat{\varepsilon}$, $\mathcal{B} = \hat{m} : S \otimes_{\mathbb{1}} S \to S$. On donne de plus un opérateur de retournement des arêtes Θ sur $K = L^2(S \otimes_{\mathbb{1}} S)$, qui commute à l'action naturelle de $\hat{S}_n$ de manière à ce que l'espace L^2 des arêtes non orientées, $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta + \mathrm{id})$, soit aussi muni d'une action de $\hat{S}_n$.

Dans le cas classique on retrouve la description

du graphe de Cayley dans laquelle les arêtes orientées sont données par une origine et une direction.
Le cocycle chemin est donné implicitement par :

$$\forall x \in \hat{\mathcal{B}} \quad (B-O)\, c(x) = x - \hat{\varepsilon}(x) 1 .$$

Toute la difficulté du théorème est de démontrer que cette equation a bien une solution $c : \hat{\mathcal{B}} \to K_g$ (en effet $B-O$ est un morphisme et le membre de droite est clairement un cocycle). Pour cela il faut comprendre K_g, donc Θ, qui est non-involutif dans le cas qtque.