Algèbres de Hecke et complétion de Schlichting pour les groupes quantiques discrets

Roland Vergnioux

travail commun avec A. Skalski et C. Voigt

Université de Caen Normandie

Paris, 17 mars 2022

Outline

1. Algèbres de Hecke pour les groupes quantiques discrets
   - Structure de l'espace quotient
   - Algèbre de Hecke

2. Complétion de Schlichting
   - Construction de la complétion
   - Application aux opérateurs de Hecke
   - Exemples

Groupes quantiques et sous-groupes

Un **groupe quantique discret** $\mathbb{\Gamma}$ est donné par

- une algèbre de la forme $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) = \ell^\infty\text{–}\bigoplus_{\alpha\in I(\mathbb{\Gamma})} B(H_\alpha)$, $\dim H_\alpha < \infty$,
- un coproduit $\Delta : \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})\bar{\otimes}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$.

On note $p_\alpha = \mathrm{id}_{H_\alpha}$, $a_\alpha = p_\alpha a \in B(H_\alpha)$.
$I(\mathbb{\Gamma})$ est l'ensemble des irréductibles de $\mathrm{Corep}(\mathbb{\Gamma}) = \mathrm{Rep}(\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}))$.
Structure tensorielle : $v \otimes w := (v \otimes w) \circ \Delta$. Dual : $\bar{v} = v \circ R$.

Cas classique $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$: $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ commutative $\Leftrightarrow \forall\alpha \dim H_\alpha = 1$.
Alors $I(\mathbb{\Gamma}) = \Gamma$, $\alpha \otimes \beta = \alpha\beta$, $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$.

Un **sous-groupe** (quantique) $\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$ est donné par $\pi_{\mathbb{\Lambda}} : \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \twoheadrightarrow \ell^\infty(\mathbb{\Lambda})$ compatible avec Δ. On a $\ell^\infty(\mathbb{\Lambda}) \simeq p_{\mathbb{\Lambda}}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ avec $p_{\mathbb{\Lambda}} \in \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ projection centrale telle que $\Delta(p_{\mathbb{\Lambda}})(1 \otimes p_{\mathbb{\Lambda}}) = p_{\mathbb{\Lambda}} \otimes p_{\mathbb{\Lambda}} = \Delta(p_{\mathbb{\Lambda}})(p_{\mathbb{\Lambda}} \otimes 1)$.

$\pi_{\mathbb{\Lambda}}^* : \mathrm{Corep}(\mathbb{\Lambda}) \to \mathrm{Corep}(\mathbb{\Gamma})$ est pleinement fidèle, $I(\mathbb{\Lambda}) \subset I(\mathbb{\Gamma})$.
Pour $v \in \mathrm{Corep}(\mathbb{\Gamma})$ on note $v_{\mathbb{\Lambda}} \in \mathrm{Corep}(\mathbb{\Lambda})$ la composante $\mathbb{\Lambda}$-isotypique.

Espace quotient

On note $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})^{\mathbb{\Lambda}} = \{a \in \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \mid (1 \otimes p_{\mathbb{\Lambda}})\Delta(a) = a \otimes p_{\mathbb{\Lambda}}\}$ et $\mathrm{Corep}(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \mathrm{Rep}(\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}))$. On a $\Delta(\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})) \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})\bar{\otimes}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Proposition-Définition

$I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$ quotient de $I(\mathbb{\Gamma})$ par $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists \lambda \in I(\mathbb{\Lambda}) \quad \beta \subset \alpha \otimes \lambda$.
Pour $[\alpha] \in I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$ la projection $p_{[\alpha]} = \sum_{\beta\in[\alpha]} p_\beta$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.
On note $\kappa_\alpha = \dim_q(\bar{\alpha} \otimes \alpha)_{\mathbb{\Lambda}}$.
On note $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \bigoplus p_{[\alpha]}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, $c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \prod p_{[\alpha]}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Théorème

- *On a $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \ell^\infty\text{–}\bigoplus_{[\alpha]} p_{[\alpha]}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.*
- *$(a \mapsto a_\alpha)$ est injective sur $p_{[\alpha]}\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, d'image $B(H_\alpha)'_{\mathbb{\Lambda}} \cap B(H_\alpha)$.*
- *Plus généralement $\mathrm{Hom}_{\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}}(\alpha,\beta) = B(H_\alpha, H_\beta)_{\mathbb{\Lambda}}$.*
- *Pour $a \in \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ on a $a = \sum_{[\alpha]} \kappa_\alpha^{-1}(h_R \otimes \mathrm{id})[(S^{-1}(a_\alpha) \otimes 1)\Delta(p_{\mathbb{\Lambda}})]$.*

Espace quotient

On note $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})^{\mathbb{\Lambda}} = \{a \in \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \mid (1 \otimes p_{\mathbb{\Lambda}})\Delta(a) = a \otimes p_{\mathbb{\Lambda}}\}$ et $\mathrm{Corep}(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \mathrm{Rep}(\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}))$. On a $\Delta(\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})) \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \bar{\otimes} \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Proposition-Définition

$I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$ quotient de $I(\mathbb{\Gamma})$ par $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists \lambda \in I(\mathbb{\Lambda}) \quad \beta \subset \alpha \otimes \lambda$.
Pour $[\alpha] \in I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$ la projection $p_{[\alpha]} = \sum_{\beta \in [\alpha]} p_\beta$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.
On note $\kappa_\alpha = \dim_q(\bar{\alpha} \otimes \alpha)_{\mathbb{\Lambda}}$.
On note $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \bigoplus p_{[\alpha]} \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, $c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \prod p_{[\alpha]} \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Analogue de la mesure de comptage sur Γ/Λ :

Corollaire

$c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ admet une (unique) forme positive $\mathbb{\Gamma}$-invariante fidèle donnée par

$$\mu(a) = \sum_{[\alpha]} \kappa_\alpha^{-1} h_L(a_\alpha).$$

L'Algèbre de Hecke

Définition

Pour $a \in c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, $b \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$ on pose

$$a * b = (\mathrm{id} \otimes \mu)[\Delta(a)(1 \otimes S(b))] = (\mu S \otimes \mathrm{id})[\Delta(b)(S^{-1}(a) \otimes 1)] \in c(\mathbb{\Gamma})$$

et $a^\sharp = S(a^*) \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$.

Cas classique : $\forall\alpha \dim_q(\alpha) = 1$, $\kappa_\alpha = 1$. On retrouve la formule

$$(a * b)(g) = \sum_{[h]\in\Gamma/\Lambda} a(gh)b(h^{-1}).$$

Proposition-Définition

$\mathscr{H}(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda}) := c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \cap c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$ est une algèbre involutive pour $*$ et $\sharp$, avec unité $p_{\mathbb{\Lambda}}$, stable par σ_t^R, σ_t^L et τ_t.

L'Algèbre de Hecke

Proposition-Définition

$\mathscr{H}(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda}) := c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \cap c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$ est une algèbre involutive pour $*$ et $^\sharp$, avec unité $p_{\mathbb{\Lambda}}$, stable par σ_t^R, σ_t^L et τ_t.

NB. $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \cap c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$ est aussi une sous-$*$-algèbre, possiblement dégénérée, de $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$. Notons, pour $\tau \in \mathbb{\Lambda}\backslash I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$:

$$L(\tau) = \#\{\alpha \in \mathbb{\Lambda}\backslash I(\mathbb{\Gamma}) \mid \alpha \subset \tau\}, \quad R(\tau) = \#\{\alpha \in I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda} \mid \alpha \subset \tau\}.$$

Proposition-Définition

On dit que $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ est un couple de Hecke si $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \cap c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma}) \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ est non dégénérée $\Leftrightarrow \forall\tau \in \mathbb{\Lambda}\backslash I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda} \quad L(\tau) < \infty$.

Exemples : $\mathbb{\Lambda}$ fini ou d'indice fini. Cas normal : Si $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})$, alors $\mathscr{H}(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ est l'algèbre de convolution du groupe quantique quotient $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$.

Propriétés modulaires

État canonique sur $\mathscr{H}(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$: $\omega =$ restriction de ϵ. Il est fidèle.

Proposition-Définition

Soit $\nabla \in c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ unique tel que $\mu S(a) = \mu(\nabla a)$ pour tout $a \in \mathscr{H}(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$. Alors $\theta_t : a \mapsto \sigma_t^R(\nabla^{it} a)$ est un groupe de $\sharp$-automorphismes de $\mathscr{H}(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$ est ω est θ-KMS.

Théorème

On suppose $\mathbb{\Lambda}$ unimodulaire. Alors $\nabla_\alpha = (\tilde{L}([\![\alpha]\!])/\tilde{R}([\![\alpha]\!]))\, F_\alpha^2$ où les F_α sont les matrices modulaires de Woronowicz et, pour $\tau = [\![\alpha]\!] \in \mathbb{\Lambda}\backslash I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda}$:

$$\tilde{L}(\tau) = \sum_{[\delta]\in\mathbb{\Lambda}\backslash I(\mathbb{\Gamma}),[\delta]\subset\tau} (\dim_q \delta)^2/\kappa_{\bar{\delta}}$$
$$\tilde{R}(\tau) = \sum_{[\delta]\in I(\mathbb{\Gamma})/\mathbb{\Lambda},[\delta]\subset\tau} (\dim_q \delta)^2/\kappa_{\delta}.$$

Il y a aussi une formule, plus compliquée, dans le cas où $\mathbb{\Lambda}$ n'est pas unimodulaire...

Opérateurs de Hecke

On rappelle que $c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ est munie d'une action de $\mathbb{\Gamma}$ à gauche.

Proposition

Soit $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ *un couple de Hecke. Alors on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda}) &\longrightarrow \mathrm{End}(c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}))^{\mathbb{\Lambda}} \\ a &\longmapsto T(a) := (\cdot * a) \\ F(p_{\mathbb{\Lambda}}) &\longleftarrow F \end{aligned}$$

De plus $(x \mid T(a)y) = (T(a^\sharp)x \mid y)$ *pour le produit scalaire associé à* μ.

Théorème

Soit $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ *un couple de Hecke.* $T(a)$ *est bornée sur* $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ *pour tout* $a \in \mathscr{H}(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ **ssi** $\kappa_\gamma \leq C_\beta \kappa_\alpha$ *dès que* $\gamma \subset \alpha \otimes \beta$.

Cette propriété n'est pas vérifiée par toutes les inclusions $\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$. Je ne sais pas montrer *directement* qu'elle l'est par les couples de Hecke.

Outline

1. Algèbres de Hecke pour les groupes quantiques discrets
   - Structure de l'espace quotient
   - Algèbre de Hecke
2. Complétion de Schlichting
   - Construction de la complétion
   - Application aux opérateurs de Hecke
   - Exemples

Complétion de Schlichting

Rappel. On considère $\lambda : \Gamma \to \mathrm{Sym}(\Gamma/\Lambda)$ par translation à gauche.
On définit $G = \overline{\lambda(\Gamma)}$. Si (Γ, Λ) est un couple de Hecke, c'est un groupe localement compact et $H = \overline{\lambda(\Lambda)}$ est compact ouvert.
$\mathrm{Sym}(\Gamma/\Lambda)$ n'a pas de bon analogue quantique...

Définition

On pose $\mathscr{O}_c(\mathbb{G}) = \mathrm{alg}\text{–}\langle a * b, a \in c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}), b \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})\rangle \subset c(\mathbb{\Gamma})$.

$$C_0(\mathbb{G}) = C^*\text{–}\langle a * b, a \in c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}), b \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})\rangle \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}).$$

Cas classique : $\Gamma \to G$ induit un plongement $C_0(G) \subset \ell^\infty(G)$.
Si $a = \mathbb{1}_{[r]}$, $b = \mathbb{1}_{[s]}$ alors $a * b = \mathbb{1}_{\{g \mid g[s]^{-1} = [r]\}}$.

Complétion de Schlichting

Définition

On pose $\mathscr{O}_c(\mathbb{G}) = \mathrm{alg}\text{–}\langle a * b, a \in c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}), b \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})\rangle \subset c(\mathbb{\Gamma})$.

$$C_0(\mathbb{G}) = C^*\text{–}\langle a * b, a \in c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}), b \in c_c(\mathbb{\Lambda}\backslash\mathbb{\Gamma})\rangle \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}).$$

Cas classique : $\Gamma \to G$ induit un plongement $C_0(G) \subset \ell^\infty(G)$.
Si $a = \mathbb{1}_{[r]}$, $b = \mathbb{1}_{[s]}$ alors $a * b = \mathbb{1}_{\{g \mid g[s]^{-1}=[r]\}}$.

Théorème

Si $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ *est un couple de Hecke on a*

$$\Delta(\mathscr{O}_c(\mathbb{G}))(1 \otimes \mathscr{O}_c(\mathbb{G})) = \mathscr{O}_c(\mathbb{G}) \odot \mathscr{O}_c(\mathbb{G}) = \Delta(\mathscr{O}_c(\mathbb{G}))(\mathscr{O}_c(\mathbb{G}) \otimes 1).$$

$\mathscr{O}_c(\mathbb{G})$ *est une algèbre de Hopf de multiplicateurs.*
$C_0(\mathbb{G})$ *est une* C^**-algèbre de Hopf bisimplifiable.*

Le poids de Haar

Corollaire-Définition

$C(\mathbb{H}) := p_\wedge C_0(\mathbb{G})$ est une C^*-algèbre de Hopf (avec unité $p_\wedge$).
Elle admet donc un état de Haar h.
On a $c_c(\Gamma/\Lambda) = \mathscr{O}_c(\mathbb{G})^{\mathbb{H}} =: c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ dans $\ell^\infty(\Gamma)$.

Corollaire-Définition

$\varphi := \mu(\mathrm{id} \otimes hp_\wedge)\Delta$ est une intégrale sur $\mathscr{O}_c(\mathbb{G})$. $\mathbb{G}$ est un groupe quantique algébrique, et donc un groupe quantique localement compact.

NB. Les groupes quantiques algébriques $\mathbb{G}$ avec $\mathscr{O}_c(\mathbb{G})$ commutative sont exactement les groupes localements compact G qui admettent un sous-groupe compact ouvert H, et on a

$$\mathscr{O}_c(G) = \{f \in C_c(G) \mid \dim \mathrm{Vect}(H \cdot f) < \infty\}.$$

Couples réduits

Si $\delta : C_0(\mathbb{X}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes C_0(\mathbb{X}))$ est une action de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\mathbb{X}$, on considère le conoyau $N(\mathbb{X}) = \{(\mathrm{id} \otimes \varphi)\delta(a) \mid a \in C_0(\mathbb{X}), \varphi \in C_0(\mathbb{X})^*\}'' \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$.

On a $N(\mathbb{X}) = L^\infty(\mathbb{\Sigma})$ pour un groupe quantique discret $\mathbb{\Sigma}$ qui en général n'est pas un quotient de $\mathbb{\Gamma}$. On dit que l'action est fidèle si $N(\mathbb{X}) = \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$.

Définition

On dit que le couple $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ est réduit si l'action de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\mathbb{X} = \mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$ est fidèle.

Par définition de $a * b = (\mathrm{id} \otimes \mu)[\Delta(a)(1 \otimes S(b))]$, on a

$$N(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = C_0(\mathbb{G})'' \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}).$$

$(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ est réduit ssi « $\mathbb{\Gamma}$ se plonge dans $\mathbb{G}$ ».

Proposition

On suppose $(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{\Lambda})$ réduit. Alors $\mathbb{G}$ est discret **ssi** *$\mathbb{\Lambda}$ est fini.*

L'Algèbre de Hecke

Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique algébrique, $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ un sous-groupe compact ouvert algébrique, donné par $p_{\mathbb{H}} \in \mathscr{O}_c(\mathbb{G})$.

Définition

On note $c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \mathscr{O}_c(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$ *et* $\ell^2(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \overline{c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H})} \subset L^2(\mathbb{G})$.
On pose $\mathscr{H}(\mathbb{G}, \mathbb{H}) = {}^{\mathbb{H}}\mathscr{O}_c(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$*, muni du produit de convolution de* $\mathscr{O}_c(\mathbb{G})$.

Proposition

On a $\mathscr{H}(\mathbb{G}, \mathbb{H}) \simeq \mathrm{End}(c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H}))^{\mathbb{G}}$, $a \mapsto T'(a) := (\cdot * a)$.

L'Algèbre de Hecke

Définition

On note $c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \mathscr{O}_c(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$ *et* $\ell^2(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \overline{c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H})} \subset L^2(\mathbb{G})$.
On pose $\mathscr{H}(\mathbb{G},\mathbb{H}) = {}^{\mathbb{H}}\mathscr{O}_c(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$, *muni du produit de convolution de* $\mathscr{O}_c(\mathbb{G})$.

Proposition

On a $\mathscr{H}(\mathbb{G},\mathbb{H}) \simeq \mathrm{End}(c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H}))^{\mathbb{G}}$, $a \mapsto T'(a) := (\cdot * a)$.

Si $(\mathbb{G},\mathbb{H})$ est la complétion de Schlichting de $(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$ on a

$$\mathrm{End}(c_c(\mathbb{G}/\mathbb{H}))^{\mathbb{G}} = \mathrm{End}(c_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}))^{\mathbb{\Gamma}} \text{ et } \ell^2(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}).$$

Or les opérateurs $T'(a)$ proviennent de la représ. régulière droite de $\mathbb{G}$.

Corollaire

Si $(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$ *est un couple de Hecke, les opérateurs* $T(a)$, *pour* $a \in \mathscr{H}(\mathbb{\Gamma},\mathbb{\Lambda})$, *sont bornés sur* $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Extensions HNN

On fixe $\Lambda_{\pm 1} \subset \Gamma_0$ avec un isomorphisme $\theta : \Lambda_1 \to \Lambda_{-1}$.
On considère $\Gamma = HNN(\Gamma_0, \theta)$ [Fima 2013]. $\mathbb{C}[\Gamma]$ est engendré par $\mathbb{C}[\Gamma_0]$ et un unitaire *group-like* w tel que $w^\epsilon x w^{-\epsilon} = \theta^\epsilon(x)$ pour $x \in \mathbb{C}[\Lambda_\epsilon]$.

Proposition

- *Si $\Lambda_{\pm 1}$ sont d'indice fini dans Γ_0, différents de Γ_0, alors $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est presque normal, non normal, d'indice infini.*
- *Si $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Dom}\, \theta^k = \{1\}$ alors l'action de Γ sur Γ/Γ_0 est fidèle.*
- *On a $\nabla_w = (\tilde{L}([\![w]\!])/\tilde{R}([\![w]\!]))\, p_w$ avec*
  $\tilde{L}([\![w]\!]) = \sum_{[\delta] \in \Lambda_1 \backslash I(\Gamma_0)} \dim_q(\delta \otimes \bar{\delta}) / \dim_q(\delta \otimes \bar{\delta})_{\Lambda_1}$,
  $\tilde{R}([\![w]\!]) = \sum_{[\delta] \in I(\Gamma_0)/\Lambda_{-1}} \dim_q(\bar{\delta} \otimes \delta) / \dim_q(\bar{\delta} \otimes \delta)_{\Lambda_{-1}}$.

Extensions HNN

Proposition

- *Si* $\Lambda_{\pm 1}$ *sont d'indice fini dans* Γ_0*, différents de* Γ_0*, alors* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *est presque normal, non normal, d'indice infini.*
- *Si* $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Dom}\,\theta^k = \{1\}$ *alors l'action de* Γ *sur* Γ/Γ_0 *est fidèle.*
- *On a* $\nabla_w = (\tilde{L}([\![w]\!])/\tilde{R}([\![w]\!]))\, p_w$ *avec*
  $\tilde{L}([\![w]\!]) = \sum_{[\delta]\in\Lambda_1\backslash I(\Gamma_0)} \dim_q(\delta\otimes\bar{\delta})/\dim_q(\delta\otimes\bar{\delta})_{\Lambda_1}$,
  $\tilde{R}([\![w]\!]) = \sum_{[\delta]\in I(\Gamma_0)/\Lambda_{-1}} \dim_q(\bar{\delta}\otimes\delta)/\dim_q(\bar{\delta}\otimes\delta)_{\Lambda_{-1}}$.

Exemple. $\Sigma_{\pm 1}$ groupes classiques finis non abéliens.
On prend $\Gamma_0 = \prod'_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(k)}$ et $\Lambda_\epsilon = \prod'_{k\in\mathbb{Z}^*, k\neq\epsilon} \hat{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(k)} \subset \Gamma_0$.
Alors la proposition s'applique, $\tilde{L}([\![w]\!]) = \#\Sigma_1$, $\tilde{R}([\![w]\!]) = \#\Sigma_{-1}$.

$\mathbb{G}$ est un groupe quantique localement compact non discret, non classique, non co-classique, avec groupe modulaire non trivial si $\#\Sigma_1 \neq \#\Sigma_{-1}$.