Groupes quantiques discrets et algèbres d'opérateurs

Roland Vergnioux

Université de Caen Basse-Normandie

Caen, 7 juin 2013

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Groupes quantiques discrets

C^*-**algèbre de Woronowicz** : C^*-algèbre unifère $C^*(\mathbb{\Gamma})$ et $\Delta : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to C^*(\mathbb{\Gamma}) \otimes C^*(\mathbb{\Gamma})$ **tel que** $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$ et $\Delta(C^*\mathbb{\Gamma})(1 \otimes C^*\mathbb{\Gamma})$, $\Delta(C^*\mathbb{\Gamma})(C^*\mathbb{\Gamma} \otimes 1)$ denses dans $C^*(\mathbb{\Gamma}) \otimes C^*(\mathbb{\Gamma})$.

Woronowicz : unique état « de Haar » $h \in C^*(\mathbb{\Gamma})'$.
➔ représentation « régulière » $\lambda : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$.
On pose $C^*_r(\mathbb{\Gamma}) = \lambda(C^*\mathbb{\Gamma})$, $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = C^*_r(\mathbb{\Gamma})''$.

Un **groupe quantique discret** $\mathbb{\Gamma}$ est donné par une C^*-algèbre de Woronowicz réduite $(C^*_r(\mathbb{\Gamma}), \Delta)$.
Pour les algébristes : donné par une $*$-algèbre de Hopf $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ dont toute coreprésentation de dimension finie est unitarisable.
➔ sous-$*$-algèbre dense canonique $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \subset C^*_r(\mathbb{\Gamma})$.

Algèbres duales : $C_0(\mathbb{\Gamma})$, $C_b(\mathbb{\Gamma}) = L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ dans $B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$ ou $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]^*$.

Exemples

Cas classique : $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ groupe (discret) usuel. $C_r^*(\Gamma) \subset B(\ell^2\Gamma)$ est le sous-espace fermé engendré par les opérateurs de translations $\lambda(g)$, et Δ est donné par $\Delta(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g)$.
On s'intéresse notamment aux groupes **non moyennables**, p. ex. $\Gamma = F_N$.

Cas compact : $\mathbb{\Gamma} = \hat{G}$, G groupe compact. $\mathbb{\Gamma}$ est donné par $C_r^*(\mathbb{\Gamma}) = C(G)$ munie de $\Delta(f) = ((r,s) \mapsto f(rs))$.
q-déformations : $\mathbb{\Gamma} = \hat{G}_q$, $q \in]0,1[$, G groupe de Lie compact simple.
Par exemple : dual de $SU_q(2)$.
Ces exemples sont **moyennables**.

Exemples

Cas classique : $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ groupe (discret) usuel. $C^*_r(\Gamma) \subset B(\ell^2\Gamma)$ est le sous-espace fermé engendré par les opérateurs de translations $\lambda(g)$, et Δ est donné par $\Delta(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g)$.
On s'intéresse notamment aux groupes **non moyennables**, p. ex. $\Gamma = F_N$.

Groupes quantiques libres. [Wang, Van Daele]
$C^*(\mathbb{\Gamma})$ définie par générateurs et relations :

$$C^*(\mathbb{F}U(Q)) = \langle u_{ij}, 1 \leq i,j \leq N \mid u \text{ et } Q\bar{u}Q^{-1} \text{ unitaires}\rangle,$$
$$C^*(\mathbb{F}O(Q)) = \langle u_{ij}, 1 \leq i,j \leq N \mid u \text{ unitaire et } u = Q\bar{u}Q^{-1}\rangle.$$

$Q \in GL_N(\mathbb{C})$ est un paramètre. Pour $\mathbb{F}O(Q)$ on suppose $Q\bar{Q} = \pm I_N$.
Groupe quantique libre : $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(P_1) * \cdots * \mathbb{F}O(P_k) * \mathbb{F}U(Q_1) * \cdots * \mathbb{F}U(Q_l)$.
$\mathbb{F}O(Q)$ est non-moyennable dès que $N \geq 3$.

Duaux de libérations [Banica] de certains groupes finis / compacts.

Plan de l'exposé

Coreprésentations

Coreprésentation unitaire de dim. finie de $C^*(\mathbb{\Gamma})$ sur H :
$v \in L(H) \otimes C^*(\mathbb{\Gamma})$ unitaire telle que $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(v) = v_{12} v_{13}$.
➜ C^*-catégorie monoïdale $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, irréductibles $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$.
$\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ et $F : \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Hilb}$ permettent de reconstruire $\mathbb{\Gamma}$.
Par exemple $C_0(\mathbb{\Gamma}) \simeq \bigoplus_{v \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}} L(H_v)$.

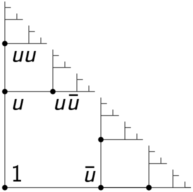
Cas classique : $\mathrm{Irr}\,\Gamma = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes g \mid g \in \Gamma\} \simeq \Gamma$.
Cas compact : $\mathrm{Corep}\,\hat{G} = \mathrm{Rep}\,G$.
En général $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ est semi-simple.

Règles de fusion : $r \otimes s \simeq \sum m_{r,s}^t t$ avec $r,\ s,\ t \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$, $m_{r,s}^t \in \mathbb{N}$.
Graphe de Cayley classique $X(\mathbb{\Gamma}, D)$ pour $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$: $X^{(0)} = \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$,

$$X^{(1)} = \{(r,s) \in (\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma})^2 \mid \exists d \in D\ s \subset r \otimes d\}.$$

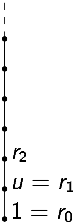
Coreprésentations

Graphes de Cayley classiques : [Banica]



$\mathbb{F}U(Q)$

$D = \{u, \bar{u}\}$



$\mathbb{F}O(Q)$

$D = \{u\}$

[Banica-V. 2009, 2010] : règles de fusion pour H_N^{s+} et O_N^*.

Groupes quantiques orthogonaux semi-libérés

Définition : $\hat{\mathbb{\Gamma}} = O_N^*$ est le quotient de $\mathbb{F}O(I_N)$ par les relations $abc = cba$, où a, b, c sont des générateurs u_{ij}.
Il s'avère que O_N^* est très proche d'un groupe compact classique.

Quotient diagonal ➔ groupe des poids :
On note L le groupe tel que $C^*(L) = C^*(\mathbb{\Gamma})/\langle u_{ij} \mid i \neq j \rangle$.
Image de $v \in \mathrm{Corep}\, C^*(\mathbb{\Gamma})$ dans $C^*(L)$ ➔ poids $P(v) \in \mathbb{N}[L]$

Théorème (Banica-V. 2010)

Pour $\mathbb{\Gamma} = \hat{O}_N^*$ et $v, w \in \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ on a $v \simeq w$ **ssi** *$P(v) = P(w)$.*
On a $L \simeq \mathbb{Z}^{N-1} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

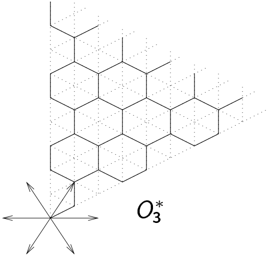
Outil pour la preuve : la sous-algèbre $\langle u_{ij} u_{kl} \rangle \subset C(O_N^*)$ est commutative et isomorphe à $C(PU_N)$.

Groupes quantiques orthogonaux semi-libérés

Définition : $\hat{\mathbb{\Gamma}} = O_N^*$ est le quotient de $\mathbb{F}O(I_N)$ par les relations $abc = cba$, où a, b, c sont des générateurs u_{ij}.
Il s'avère que O_N^* est très proche d'un groupe compact classique.

On en déduit une description des règles de fusion de O_N^* en fonction de celles de U_N, via le groupe des poids L qui est non abélien.

- → règles de fusion non commutatives
- → croissance polynômiale
- → graphe de Cayley :



O_3^*

Groupes quantiques libres

Les règles de fusion de $\mathbb{F}O(Q)$, pour $Q\bar{Q} = \pm I_N$, sont les mêmes que celles de $SU(2)$: irréductibles r_k, $k \in \mathbb{N}$ avec [Banica]

$$r_k \otimes r_l \simeq r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}.$$

On a besoin d'en savoir plus : « géométrie » des règles de fusion.

Lemme (V. 2005, Vaes-V. 2007)

Soit p_l, $p_r \in \mathrm{End}(H_1 \otimes H_k \otimes H_1)$ les projecteurs sur les sous-esp. équivalents à H_k provenant resp. des inclusions $H_1 \otimes H_{k+1}$, $H_{k+1} \otimes H_1 \subset H_1 \otimes H_k \otimes H_1$. Alors $\|p_l p_r\| = (\mathrm{qdim}\, r_k)^{-1}$.

Ce genre d'argument ne dépend de $\mathbb{F}O(Q)$ qu'à équivalence monoïdale près — i.e. ne dépend pas du foncteur fibre $F : \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Hilb}$.

Plan de l'exposé

La représentation adjointe

Γ a aussi une repr. régulière droite $\rho : C^*(\Gamma) \to B(\ell^2\Gamma)$ qui commute à λ.
➜ **représentation adjointe** $\mathrm{ad} = (\lambda, \rho) \circ \Delta : C^*_p(\Gamma) \to B(\ell^2\Gamma)$.
$\mathbb{C}\xi_0$ est stable par ad **ssi** Γ est unimodulaire.
➜ sous-représentation $\mathrm{ad}^\circ : C^*_p(\Gamma) \to B(\xi_0^\perp)$.

Proposition (V.)

On considère le cas $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $Q^*Q = I_N$, $N \geq 3$. Alors ad° se factorise à travers λ.

Preuve : **propriété RD** [V. 2007], propriété de Haagerup [Brannan] et estimées de croissance pour les coefficients de ad°.

Corollaire (Vaes-V.)

Sous les mêmes hypothèses, $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$ est intérieurement moyennable, $\mathscr{L}(\Gamma)$ est un facteur plein de type II_1.

La représentation adjointe

Γ a aussi une repr. régulière droite $\rho : C^*(\Gamma) \to B(\ell^2\Gamma)$ qui commute à λ.
→ **représentation adjointe** $\mathrm{ad} = (\lambda, \rho) \circ \Delta : C_p^*(\Gamma) \to B(\ell^2\Gamma)$.
$\mathbb{C}\xi_0$ est stable par ad **ssi** Γ est unimodulaire.

Cas non-unimodulaire ($\Leftrightarrow h$ non tracial) :
On utilise une déformation de $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad})(u)$ faisant intervenir $(\sigma_t^h)_t$.
On démontre une propriété de trou spectral pour ces **opérateurs**.

Théorème (Vaes-V. 2007)

Soit $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$, $Q^*Q \neq I_N$ « mais pas trop ».
Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ le sous-groupe engendré par $\mathrm{Sp}((Q^*Q) \otimes (Q^*Q)^{-1})$.
Alors $\mathscr{L}(\Gamma)$ est un facteur plein de type III_λ si $\Lambda = \lambda^{\mathbb{Z}}$, et de type III_1 sinon.

Propriétés d'approximation

Théorème (Vaes-V. 2007)

Pour $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$, la C^*-algèbre $C_r^*(\Gamma)$ est exacte.

Preuve :

→ L'exactitude est préservée par équivalence monoïdale, or $\mathbb{F}O(Q)$ est mon. équivalent au dual d'un groupe $SU_q(2)$, qui est moyennable.

→ Construction d'un « bord de Gromov » quantique pour $\mathbb{F}O(Q)$. L'action naturelle sur $\partial\mathbb{F}O(Q)$ est moyennable, et $C(\partial\mathbb{F}O(Q))$ est nucléaire.

Théorème (Brannan 2011)

Dans le cas unimodulaire, $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$ a la propriété de Haagerup.

Théorème (Freslon 2012)

Dans le cas unimodulaire, $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$ a la CBAP.

Propriété d'Akemann-Ostrand

Les groupes quantiques libres ont la propriété « AO^+ » :
(ce qui correspond aussi à la bi-exactitude dans le cas classique)

Théorème (V. 2005)

Soit $\mathbb{F}$ un groupe quantique libre sans facteur « de dimension 2 ». Alors il existe une isométrie $V : \ell^2\mathbb{F} \to \ell^2\mathbb{F} \otimes \ell^2\mathbb{F}$ telle que

$$V^*(\lambda \otimes \rho)(x)V = (\lambda, \rho)(x) \mod K(\ell^2\mathbb{F})$$

pour tout $x \in C_r^*(\mathbb{F}) \otimes_{\max} C_r^*(\mathbb{F})$.

En particulier $\pi \circ (\lambda, \rho) : C_r^*(\mathbb{F}) \otimes_{\max} C_r^*(\mathbb{F}) \to B(H)/K(H)$ se factorise à travers $\otimes_{\min}$: propriété « AO ».

L'isométrie est explicite et s'interprète à l'aide d'une application « but » sur les arêtes ascendantes du graphe de Cayley complet.
Cas exclus : duaux de $SU_{\pm 1}(2)$ (moyennables) et $\mathbb{F}U(I_2)$.

Propriété d'Akemann-Ostrand

Les groupes quantiques libres ont la propriété « AO^+ ».

Application : solidité.

[Ozawa 2004] exactitude + AO $\Rightarrow$ solidité

Théorème (Vaes-V. 2007)

Le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O(Q))$ est solide (généralisé), donc premier.

[Popa-Vaes 2012] *CBAP* + AO^+ $\Rightarrow$ solidité forte

Théorème (Isono 2012)

Dans le cas unimodulaire, le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O(Q))$ est fortement solide.
En particulier il n'a pas de sous-algèbre de Cartan.

Plan de l'exposé

3. Cohomologie L^2
   - Graphe de Cayley quantique
   - Cocycle chemin
   - Cohomologie L^2

4. K-Théorie
   - Arbre de Bass-Serre quantique
   - La propriété de Baum-Connes forte
   - K-théorie des groupes quantiques libres

Graphe de Cayley quantique

Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret et $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$.
On suppose $\bar{D} = D$ et $1 \notin D$. À D correspond un proj. central $p_1 \in C_b(\mathbb{\Gamma})$.

Définition (V. 2005)

Le graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ associé à $(\mathbb{\Gamma}, D)$ est donné par :

- *les C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(0)}) = C_0(\mathbb{\Gamma})$ et $C_0(\mathbb{X}^{(1)}) = C_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes p_1 C_0(\mathbb{\Gamma})$ représentées sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma})$ et $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \otimes p_1 \ell^2(\mathbb{\Gamma})$,*
- *les opérateurs densément définis S, $B : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et l'opérateur unitaire $\Theta \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ définis par*

$$S(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = \Lambda(x)\epsilon(y), \quad B(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = \Lambda(xy),$$
$$\Theta(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = (\Lambda \otimes \Lambda)((x \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(y)).$$

Cas classique : $D \subset \Gamma$, $X^{(0)} = \Gamma$, $X^{(1)} = \Gamma \times D$,
$s(g,h) = g$, $b(g,h) = gh$, $\theta(g,h) = (gh, h^{-1})$.

Graphe de Cayley quantique

Définition (V. 2005)

Le graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ associé à (Γ, D) est donné par :

- *les C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(0)}) = C_0(\Gamma)$ et $C_0(\mathbb{X}^{(1)}) = C_0(\Gamma) \otimes p_1 C_0(\Gamma)$ représentées sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\Gamma)$ et $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\Gamma) \otimes p_1 \ell^2(\Gamma)$,*
- *les opérateurs densément définis S, $B : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et l'opérateur unitaire $\Theta \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ définis par*

$$S(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = \Lambda(x)\epsilon(y), \quad B(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = \Lambda(xy),$$
$$\Theta(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = (\Lambda \otimes \Lambda)((x \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(y)).$$

Cas quantique : en général $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$, et on a en fait deux représentations de $C_0(\mathbb{X}^{(i)})$ sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(i)})$ ➔ subtilités pour la notion d'orientation.

Avantage par rapport au graphe de Cayley **classique** : actions de Γ.

Cocycle chemin

Espace des arêtes antisymétriques : $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathrm{Ker}(\Theta + \mathrm{id})$.

Définition (V. 2012)

Cocycle chemin dans un graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$: cocycle $c : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)})$ tel que $B(c(x)) = c_0(x) := x\xi_0 - \xi_0\epsilon(x)$.

Exemple : $\Gamma = F_2$, $D = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\} \twoheadrightarrow X$ arbre, on pose :

$$c(g) = \sum\{a - \theta(a) \mid a \text{ arête sur le chemin de } e \text{ vers } g\}.$$

Théorème (V. 2012)

Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ ou $\mathbb{F}U(Q)$, $N \geq 3$. Alors il existe un unique cocycle chemin c de $\mathbb{\Gamma}$ dans $\mathbb{X}$. De plus :

- *dans le cas orthogonal, c est borné / trivial ;*
- *dans le cas unitaire, c n'est ni borné ni propre.*

Cohomologie L^2

On a le « lemme d'universalité » suivant :

Lemme (V. 2012)

Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique de $(\mathbb{\Gamma}, D)$, avec $\mathbb{\Gamma}$ unimodulaire. On suppose qu'il existe un cocycle chemin c de $\mathbb{\Gamma}$ dans $\mathbb{X}$ qui admet un vecteur fixe $\xi \in \Lambda(\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))\otimes p_1\ell^2(\mathbb{\Gamma}) \subset \ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Alors $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})) = 0$.

On peut vérifier « $\xi \in \Lambda(\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))\otimes p_1\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ » grâce à la **propriété RD**.

Corollaire : $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})) = 0$ pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(I_N)$, $N \geq 3$.
Par ailleurs $\beta_1^{(2)}(\mathbb{\Gamma}) \neq 0$ pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}U(I_N)$, $N \geq 2$.

Question : $\mathscr{L}(\mathbb{F}O(I_N))$ est-il L^2-rigide au sens de Peterson ?

Plan de l'exposé

3. Cohomologie L^2
   - Graphe de Cayley quantique
   - Cocycle chemin
   - Cohomologie L^2

4. K-Théorie
   - Arbre de Bass-Serre quantique
   - La propriété de Baum-Connes forte
   - K-théorie des groupes quantiques libres

Arbre de Bass-Serre quantique

On considère un prod. libre $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 * \mathbb{\Gamma}_1$. **But :** stabilité de Baum-Connes.

Arbre de Bass-Serre quantique : « $\mathbb{X}^{(1)} = \mathbb{\Gamma}^2$, $\mathbb{X}^{(0)} = \mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_1 \sqcup \mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_2$ » et les applications quotient naturelles. Dans ce cas $\Theta^2 = \mathrm{id}$...

[V. 2002] : opérateur de Julg-Valette → $\gamma \in KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ → K-moyennabilité d'un produit libre amalgamé de groupes quantiques moyennables.
[V.-Voigt 2012] : algèbre de Kasparov-Skandalis $\mathscr{P}$ → éléments Dirac $D \in KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$ et dual-Dirac $\eta \in KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \Sigma\mathscr{P})$.

Théorème (V.-Voigt 2013)

On a $\eta \otimes D = \gamma = [\mathrm{id}]$ *dans* $KK^{D(\mathbb{\Gamma})}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
On a $D \otimes \eta = [\mathrm{id}]$ *dans* $KK(\Sigma\mathscr{P}, \Sigma\mathscr{P})$.

Remarque : pour pouvoir prendre des produits tensoriels d'actions, il est nécessaire de travailler avec le **double de Drinfel'd** $D(\mathbb{\Gamma})$.

Baum-Connes fort

La catégorie $KK^{\mathbb{\Gamma}}$ est **triangulée** par les triangles $\Sigma B \to C \to A \to B$ isomorphes à des triangles de cônes. [Meyer-Nest]

Soit $\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle \subset KK^{\mathbb{\Gamma}}$ la sous-catégorie localisante engendrée par les algèbres $A \otimes C_0(\mathbb{\Gamma})$, $A \in KK$: stable par suspension, somme directe dénombrable, isomorphisme dans $KK^{\mathbb{\Gamma}}$, complétion des triangles. $\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$ joue le rôle de la classe des $\mathbb{\Gamma}$-C^*-algèbres propres à $KK^{\mathbb{\Gamma}}$-équivalence près.

Propriété de Baum-Connes forte (sans torsion) : $\langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle = KK^{\mathbb{\Gamma}}$.
Cas classique sans torsion : « $\gamma = 1$ dans $KK^{\Gamma}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ »

Théorème (V.-Voigt 2013)

On suppose que $\mathbb{\Gamma}_0$, $\mathbb{\Gamma}_1$ vérifient (BC forte). Alors $\Sigma \mathscr{P} \in \langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$ et $D \otimes \eta = [\mathrm{id}]$ dans $KK^{D(\mathbb{\Gamma})}$. En particulier $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 * \mathbb{\Gamma}_1$ vérifie (BC forte).

K-théorie des groupes quantiques libres

Résolution T-projective de $A \in KK^{\mathbb{\Gamma}}$: $\cdots \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$

- avec C_i facteurs directs d'algèbres de $TI_{\mathbb{\Gamma}}$, et
- exacte en KK-théorie **non équivariante**.

➜ permet de calculer $K_*(A \rtimes_r \mathbb{\Gamma})$ si $A \in \langle TI_{\mathbb{\Gamma}} \rangle$.

En particulier si $C_2 = 0$: suite exacte cyclique à 6 termes.

Application.

$\mathbb{F}O(Q)$ vérifie (BC forte) [Voigt] + $\mathbb{F}U(Q) \subset \mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z}$ [Banica]

$\implies \mathbb{F}U(Q)$ vérifie (BC forte).

En écrivant une résolution T-projective de longueur 1 de $\mathbb{C}$ on obtient :

Théorème (V.-Voigt 2013)

Pour $Q \in GL_N(\mathbb{C})$, $N > 1$ le groupe $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(Q)$ est K-moyennable et on a $K_0(C_r^*(\mathbb{F})) \simeq \mathbb{Z}$, $K_1(C_r^*(\mathbb{F})) \simeq \mathbb{Z}^2$.