Groupes quantiques discrets et algèbres d'opérateurs

Mémoire d'habilitation

Roland Vergnioux, 7 juin 2013

Table des matières

Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenue publiquement le 7 juin 2013 devant le jury composé de :
- Saad Baaj (Clermont-Ferrand)
- Bachir Bekka (Rennes)
- Georges Skandalis (Paris)
- Stefaan Vaes (Leuven)
- Leonid Vainerman (Caen)

Rapporteurs :
- Saad Baaj (Clermont-Ferrand)
- Sergey Neshveyev (Oslo)
- Ryszard Nest (Copenhague)

Liste des publications présentées

[1] R. Vergnioux : K-amenability for amalgamated free products of amenable discrete quantum groups. *Journal of Functional Analysis*, 212(1):206–221, 2004.

[2] R. Vergnioux : Orientation of quantum Cayley trees and applications. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 580:101–138, 2005.

[3] R. Vergnioux : The property of rapid decay for discrete quantum groups. *Journal of Operator Theory*, 57(2):303–324, 2007.

[4] S. Vaes et R. Vergnioux : The boundary of universal discrete quantum groups, exactness, and factoriality. *Duke Mathematical Journal*, 140(1):35–84, 2007.

[5] T. Banica et R. Vergnioux : Fusion rules for quantum reflection groups. *Journal of Noncommutative Geometry*, 3(3):327–359, 2009.

[6] T. Banica et R. Vergnioux : Invariants of the half-liberated orthogonal group. *Annales de l'Institut Fourier*, 60(6):2137–2164, 2010.

[7] R. Vergnioux : Paths in quantum Cayley trees and L^2-cohomology. *Advances in Mathematics*, 229(5):2686–2711, 2012.

[8] R. Vergnioux et C. Voigt : The K-theory of free quantum groups, 2011. *Mathematische Annalen*, à paraître. arXiv:1112.3291.

Introduction

Mes recherches se sont consacrées, depuis la thèse, à l'étude des *groupes quantiques discrets*, d'un point de vue analytique, algébrique et géométrique.

Initiée par G.I. Kac dans les année 1960, la théorie des groupes quantiques a connu un deuxième essor dans les années 1980 avec les travaux de Drinfel'd en physique mathématique. Une axiomatisation satisfaisante du cas compact (ou, dualement, discret) a été donnée par Woronowicz dans le langage des algèbres d'opérateurs à la fin des années 1980. Dans le cas localement compact, le cadre axiomatique a été mis au point par Kac-Vainerman et Enock-Schwartz dans les années 1970, puis par Kustermans-Vaes à la fin des années 1990. La théorie a connu depuis de nombreux développements et de nouvelles applications, dans des domaines aussi variés que les algèbres d'opérateurs, la théorie des représentations, les probabilités libres, la physique mathématique.

Un groupe quantique discret $\mathbb{F}$ et son dual compact $\mathbb{G}$ sont donnés par une *C^*-algèbre de Woronowicz* réduite $A_r = C_r^*(\mathbb{F}) = C_r(\mathbb{G})$. Dans mes recherches, je m'intéresse principalement aux groupes quantiques discrets *non moyennables*, mais qui vérifient une version affaiblie de la moyennabilité : K-moyennabilité, propriété de Haagerup, propriété d'Akemann-Ostrand, ou exactitude. De plus la plupart des résultats sont motivés par l'analogie avec le cas des groupes discrets usuels, $\mathbb{F} = \Gamma$: dans ce cas $C_r^*(\Gamma)$ est la sous-algèbre involutive fermée engendrée par les opérateurs de translation par les éléments de Γ agissant sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$.

Une autre classe d'exemples « classiques » est fournie par les groupes compacts usuels G : dans ce cas $C_r^*(\mathbb{F})$ est l'algèbre des fonctions continues $C(G)$, on dit que $\mathbb{F} = \hat{G}$ est le dual du groupe compact G. Les q-déformations $\mathbb{G}_q$ de groupes de Lie compact, à la Jimbo-Drinfel'd, fournissent également des exemples de groupes quantiques compacts, et dualement de groupes quantiques discrets, mais ces derniers sont toujours moyennables.

En 1995, Wang a introduit une nouvelle classe d'exemples : celle des groupes quantiques compacts universels, donnés par des C^*-algèbres de Woronowicz pleines notées $A_u(Q)$, $A_o(Q)$. Leurs duaux discrets sont aussi appelés *groupes quantiques libres* unitaires et orthogonaux et notés $\mathbb{F}U(Q)$, $\mathbb{F}O(Q)$. Ils sont non moyennables dès que $N \geq 3$ et peuvent être considérés à certains égards comme des analogues quantiques des groupes libres usuels F_N. Plusieurs résultats de ce mémoire concernent les algèbres d'opérateurs associées à ces groupes quantiques et sont motivés par les analogies et les différences avec celles associées aux groupes libres. On étudie également quelques quotients intéressants de ces groupes quantiques libres.

Le mémoire est organisé comme suit. Dans la suite de l'introduction, destinée au non spécialiste, on présente plus en détail les objets étudiés, dans le formalisme de Woronowicz : groupes quantiques discrets, moyennabilité, coreprésentations, règles de fusion, graphes de Cayley classiques. De nombreux résultats du mémoire se démontrent *in fine* en utilisant des propriétés de la catégorie des coreprésentations. On essaie de donner à la fin de l'introduction une idée de certaines de ces propriétés, qui sont parfois techniques.

Dans le premier chapitre on présente des constructions et résultats concernant les groupes quantiques discrets qui ne portent pas directement sur les algèbres d'opérateurs associées. Il s'agit de construire et/ou d'étudier des outils qui sont ensuite utilisés en algèbres d'opérateurs. Plus précisément, on calcule dans la section 1.1 les règles de fusion de certains quotients des groupes quantiques libres, ce qui est souvent la donnée de base nécessaire pour pouvoir attaquer une étude analytique. Dans la section 1.2, on introduit les notions de graphe de Cayley quantique et d'arbre de Bass-Serre quantique et on étudie certaines propriétés de ces « graphes quantiques ». La section 1.3 est consacrée aux notions de « frontière » pour les groupes quantiques discrets : après avoir rappelé la notion de frontière de Poisson, on présente la construction de la frontière de Gromov pour les groupes quantiques libres, et on fait le lien avec les « arêtes à l'infini » du graphe de Cayley quantique.

Dans le second chapitre, on applique les constructions précédentes à des résultats de type « algèbres d'opérateurs » pour les groupes quantiques libres. Ces résultats ont été classés, de manière parfois un peu artificielle, en trois catégories : K-théorie dans la section 2.1, C^*-algèbres dans la section 2.2, algèbres de von Neumann dans la section 2.3.

Les références [1–8] renvoient à la *Liste des publications présentées* page 2. Les autres références renvoient à la bibliographie page 56. Notons que cette bibliographie ne prétend nullement à l'exhaustivité : elle a pour objet de fournir des références précises pour certains résultats mentionnés dans le mémoire, et de proposer des pistes de lectures sur certains sujets abordés.

Notations. Le signe $\otimes$ désigne, selon le contexte, le produit tensoriel algébrique d'espaces vectoriels, le produit tensoriel hilbertien d'espaces de Hilbert, le produit tensoriel minimal de C^*-algèbres, et le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann. Le signe $\otimes_{\max}$ désigne le produit tensoriel maximal de C^*-algèbres. L'endomorphisme $(x \otimes y \mapsto y \otimes x)$ de $E \otimes E$ est noté Σ si E est un espace vectoriel, σ si E est une algèbre, ainsi $\sigma = \mathrm{Ad}(\Sigma)$ dans $L(E \otimes E)$. Si E est un espace vectoriel, on note $L(E)$ l'espace des endomorphismes de E, et si E est un espace vectoriel normé, on note $B(E)$ l'espace des opérateurs bornés sur E.

Groupes quantiques discrets et compacts

L'objectif de cette section est de présenter rapidement le cadre théorique pour le reste du mémoire, ainsi que quelques exemples importants. Le point de vue qui motive la présentation est celui des *groupes discrets* et des *algèbres d'opérateurs* associées. On commence donc par rappeler quelques constructions très élémentaires de ce cas « classique ».

1. Si Γ est un groupe (sans topologie), on notera $\mathbb{C}[\Gamma]$ l'*algèbre de groupe* de Γ, c'est-à-dire l'algèbre involutive dont les éléments sont les combinaisons linéaires complexes formelles $x = \sum_{g\in\Gamma} x_g \, g$, et dont la multiplication et l'involution sont induites du produit et de l'inverse de Γ par bilinéarité et antilinéarité. Remarquons que les représentations (involutives) non dégénérées de $\mathbb{C}[\Gamma]$ sur un espace de Hilbert K correspondent aux représentations unitaires de Γ sur K. Pour reconstruire Γ à partir de $\mathbb{C}[\Gamma]$ la structure d'algèbre ne suffit pas, et on peut utiliser par exemple le *coproduit* $\Delta : \mathbb{C}[\Gamma] \to \mathbb{C}[\Gamma] \otimes \mathbb{C}[\Gamma]$, qui est l'application linéaire définie par la formule $\Delta(g) = g \otimes g$: alors les éléments $x = g$ du groupe Γ dans $\mathbb{C}[\Gamma]$ sont caractérisés par l'identité $\Delta(x) = x \otimes x$.

En général, l'algèbre $\mathbb{C}[\Gamma]$ peut être complétée de plusieurs manières en une C^*-algèbre. Notons $\lambda : \mathbb{C}[\Gamma] \to B(\ell^2(\Gamma))$ la *représentation régulière gauche* de Γ, définie par $\lambda(g)\xi = (h \mapsto \xi(g^{-1}h))$. On définit la *$C^*$-algèbre réduite* $C^*_r(\Gamma)$ comme adhérence de $\lambda(\mathbb{C}[\Gamma])$ dans $B(\ell^2(\Gamma))$ relativement à la norme d'opérateur. Par ailleurs on définit la *C^*-algèbre pleine* $C^*_p(\Gamma)$ comme complétion de $\mathbb{C}[\Gamma]$ relativement à la norme

$$\|x\|_p = \sup\{\|\pi(x)\|_{B(K)} \mid \pi : \mathbb{C}[\Gamma] \to B(K) \ast\text{-rep}\}.$$

On identifie $\mathbb{C}[\Gamma]$ à une sous-$\ast$-algèbre dense de $C^*_p(\Gamma)$; par définition les représentations unitaires de Γ correspondent aux $\ast$-représentations non dégénérées de $C^*_p(\Gamma)$. Il est notamment clair que λ s'étend en un $\ast$-homomorphisme surjectif encore noté $\lambda : C^*_p(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$.

En fait, λ est injectif exactement quand Γ est *moyennable* — c'est une des définitions possibles de la moyennabilité.

Si $\pi_i : \Gamma \to B(H_i)$, pour $i = 1, 2$, sont deux représentations unitaires de Γ, le produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2 : \Gamma \to B(H_1 \otimes H_2)$, $g \mapsto \pi_1(g) \otimes \pi_2(g)$ est encore une représentation unitaire. Au niveau C^*-algébrique, cela se traduit par le fait que le coproduit Δ s'étend en un $*$-homomorphisme $\Delta_p : C^*_p(\Gamma) \to C^*_p(\Gamma) \otimes C^*_p(\Gamma)$. Un résultat élémentaire mais important est le *principe d'absorption de Fell* : le produit tensoriel de la représentation régulière λ par n'importe quelle représentation unitaire de Γ est équivalent au produit tensoriel de λ par une représentation triviale. Au niveau C^*-algébrique, cela implique le fait que $(\lambda \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_p$ se factorise en un $*$-homomorphisme $\Delta'_r : C^*_r(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma) \otimes C^*_p(\Gamma)$. En composant avec $\mathrm{id} \otimes \lambda$ on obtient un coproduit au niveau de la C^*-algèbre réduite, $\Delta_r : C^*_r(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma) \otimes C^*_r(\Gamma)$, déterminé par la formule $\Delta_r(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g)$.

2. La définition et le théorème suivants sont centraux pour ce mémoire, dont l'un des objets est l'étude des propriétés des *C^*-algèbres de Woronowicz réduites.*

DÉFINITION 0.1.1 [Wor98, Def. 1.1] *On appelle* C^*-algèbre de Woronowicz *une C^*-algèbre unifère A munie d'un $*$-homomorphisme unifère $\Delta : A \to A \otimes A$ tel que*

- $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ *et*
- *les sous-espaces $\Delta(A)(1 \otimes A)$ et $\Delta(A)(A \otimes 1)$ sont denses dans $A \otimes A$.*

Un morphisme de C^*-algèbres de Woronowicz est un $*$-homomorphisme unifère $\Phi : A \to B$ tel que $(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_A = \Delta_B \circ \Phi$.

THÉORÈME 0.1.2 [Wor98, Thm. 1.3] *Soit (A, Δ) une C^*-algèbre de Woronowicz. Il existe un unique état $h : A \to \mathbb{C}$, appelé* état de Haar *de A, tel que $(h \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes h) \circ \Delta = 1 \cdot h$. On dit que A est* réduite *si h est fidèle sur A.*

Notons λ la représentation GNS de la C^*-algèbre de Woronowicz A associée à son état de Haar, et $A_r = \lambda(A)$. Il est facile de voir que $(\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta$ se factorise à travers λ, et que le $*$-homomorphisme $\Delta_r : A_r \to A_r \otimes A_r$ correspondant munit A_r d'une structure de C^*-algèbre de Woronowicz. Comme h est un état KMS, A est réduite **ssi** λ est un isomorphisme. On dit que A_r est la *C^*-algèbre de Woronowicz réduite* associée à A. Par commodité on notera $\Delta_r = \Delta$ lorsque cela n'entraîne pas de confusion.

Les C^*-algèbres pleine et réduite d'un groupe Γ, munies de leur coproduit, sont des exemples de C^*-algèbres de Woronowicz : en effet on a par exemple $\Delta(\mathbb{C}[\Gamma])(1 \otimes \mathbb{C}[\Gamma]) = \mathbb{C}[\Gamma] \otimes \mathbb{C}[\Gamma]$. En fait on peut montrer que toutes les C^*-algèbres de Woronowicz (A, Δ) *co-commutatives*, c'est-à-dire telles que $\sigma \circ \Delta = \Delta$, sont de ce type : plus précisément A est alors de la forme $\pi(C^*_p(\Gamma))$, où Γ est un groupe (sans topologie) et π est une représentation unitaire fidèle de Γ telle que $\pi \otimes \pi$ est faiblement contenue dans π [Wor87, Thm. 1.7]. La condition d'unicité de l'état de Haar implique immédiatement que h doit être donné, dans le cas co-commutatif, par la formule $h(\pi(g)) = \delta_{g,e}$, où e est l'élément neutre de Γ. Ainsi l'espace GNS de h est $\ell^2(\Gamma)$ et λ se factorise à travers π en la représentation GNS de h. Les C^*-algèbres de Woronowicz réduites co-commutatives sont donc, à isomorphisme près, de la forme $C^*_r(\Gamma)$.

Au vu de la discussion précédente, on dira qu'un *groupe quantique discret* $\mathbb{\Gamma}$ est donné par une C^*-algèbre de Woronowicz réduite, notée $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$. De manière générale, toute C^*-algèbre de Woronowicz pourra être notée $A = C^*(\mathbb{\Gamma})$, étant entendu que $\mathbb{\Gamma}$ est le groupe quantique discret donné par la C^*-algèbre réduite A_r : on a ainsi potentiellement plusieurs C^*-algèbres associées à un même groupe quantique discret. En particulier, on peut définir une *C^*-algèbre pleine* $C^*_p(\mathbb{\Gamma})$, dont toutes les C^*-algèbres de Woronowicz associées à $\mathbb{\Gamma}$ sont quotient : quelques détails supplémentaires sur cette construction seront donnés dans la section suivante.

On note $\ell^2\mathbb{\Gamma}$ l'espace GNS associé à l'état de Haar de $C^*(\mathbb{\Gamma})$: on a donc $\lambda(C^*(\mathbb{\Gamma})) = C^*_r(\mathbb{\Gamma}) \subset B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$. On note également $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = C^*_r(\mathbb{\Gamma})''$ l'*algèbre de von Neumann* associée à $\mathbb{\Gamma}$. On dit que $\mathbb{\Gamma}$ est *unimodulaire* si l'état de Haar $h : C^*_r(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$ est une trace. On dit que $\mathbb{\Gamma}$ est *moyennable* si toute C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{\Gamma})$ associée à $\mathbb{\Gamma}$ est isomorphe à $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ via la représentation λ. On reviendra sur cette notion centrale à la fin de cette section, et sur certains des ses affaiblissements dans la partie 2. Dans ce mémoire on s'intéresse principalement aux propriétés des algèbres $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ dans le cas non moyennable.

Notons que la même notion de groupe quantique discret peut être définie de différentes manières, et notamment d'un point de vue algébrique dans le langage des algèbres de Hopf. Plus précisément, toute C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{\Gamma})$ contient une sous-algèbre dense canonique $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ qui est munie d'une structure de $*$-algèbre de Hopf. De plus, on peut caractériser axiomatiquement [1] les algèbres $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ de ce type parmi les $*$-algèbres de Hopf, et reconstruire $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ à partir de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ [ER94, KS97, Sec. 11.3]. On discutera $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ plus en détail dans la section suivante. Dans le cas classique, $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ est l'algèbre usuelle du groupe $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$. Une approche purement algébrique est également présentée dans [VD96] au niveau de l'algèbre duale $C_c(\mathbb{\Gamma})$, dans le langage des « algèbres de Hopf de multiplicateurs ».

Par ailleurs, les groupes quantiques discrets correspondent aux groupes quantiques localement compacts $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ [KV00] dont le dual a des poids de Haar bornés, et aux unitaires multiplicatifs réguliers $V_{\mathbb{\Gamma}}$ [BS93] admettant des vecteurs co-fixes non nuls. Sans entrer dans les détails, précisons que $V_{\mathbb{\Gamma}}$ est un opérateur unitaire sur $\ell^2\mathbb{\Gamma}\otimes\ell^2\mathbb{\Gamma}$ défini à l'aide du coproduit de $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$, et qu'on peut définir $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ à partir de $V_{\mathbb{\Gamma}}$ comme une sous-algèbre de von Neumann de $B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$, de manière à avoir $V_{\mathbb{\Gamma}} \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})\bar{\otimes}\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$. Dans le cas classique on a $V_{\mathbb{\Gamma}} = \sum_{g\in\Gamma} 1\!\!1_g\otimes\lambda(g)$, où $1\!\!1_g$ est la fonction caractéristique de $\{g\}$ agissant par multiplication sur $\ell^2(\Gamma)$. La dualité entre les algèbres d'opérateurs associées à $\mathbb{\Gamma}$ est décrite par l'unitaire multiplicatif $V_{\mathbb{\Gamma}}$: par exemple, à toute forme linéaire normale $\omega \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})_* =: L^1(\mathbb{\Gamma})$ correspond l'opérateur « de convolution » $(\omega\bar{\otimes}\mathrm{id})(V_{\mathbb{\Gamma}}) \in \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$.

Dans le cas discret l'algèbre de von Neumann duale $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ est également notée $C_b(\mathbb{\Gamma})$. Elle contient une sous-C^*-algèbre canonique $C_0(\mathbb{\Gamma})$, non dégénérée et en général non unifère, qui sera fréquemment utilisée dans ce mémoire. La C^*-algèbre $C_0(\mathbb{\Gamma})$ est elle-même munie d'un coproduit Δ à valeurs dans $M(C_0(\mathbb{\Gamma})\otimes C_0(\mathbb{\Gamma}))$, et de poids de Haar à gauche et à droite $\hat{h}_L$, $\hat{h}_R$. On montre que $\mathbb{\Gamma}$ est *unimodulaire* **ssi** ces poids coïncident, ce qui justifie la terminologie. Dans le cas classique $C_0(\mathbb{\Gamma}) = C_0(\Gamma)$ est l'algèbre des fonctions nulles à l'infini sur le groupe discret Γ, les poids de Haar correspondent à la mesure de comptage et l'unimodularité est automatique.

3. Une autre classe importante de C^*-algèbres de Woronowicz provient des groupes compacts. Soit G un tel groupe, et $A = C(G)$. On a alors $A\otimes A \simeq C(G\times G)$ et on peut définir un $*$-homomorphisme $\Delta : A \to A\otimes A$ en posant $\Delta(f)(g,h) = f(gh)$. Il n'est pas difficile de vérifier que A devient ainsi une C^*-algèbre de Woronowicz — la densité de $\Delta(A)(1\otimes A)$ et $\Delta(A)(A\otimes 1)$ dans $A\otimes A$ correspondent par exemple au fait que le semi-groupe G est birégulier, ce qui implique l'existence d'inverses par compacité. De plus, il résulte facilement de la théorie de Gelfan'd-Naimark que toutes les C^*-algèbres de Woronowicz commutatives sont de ce type. Dans ce cas, l'état de Haar h correspond à l'intégration des fonctions continues contre la mesure de Haar de G, et A est automatiquement réduite.

1. Ce sont les $*$-algèbres de Hopf engendrées par des coefficients de coreprésentations unitaires, ou encore les $*$-algèbres de Hopf telle que $x^*x = 0 \Rightarrow x = 0$, ou encore les $*$-algèbres de Hopf cosemisimples dont l'état de Haar est positif.

Cette classe d'exemples fournit un autre point de vue sur la théorie : on interprète toute C^*-algèbre de Woronowicz réduite $A = C_r(\mathbb{G})$ comme l'algèbre des fonctions sur un *groupe quantique compact* $\mathbb{G}$. Les autres C^*-algèbres de Woronowicz admettant $C_r(\mathbb{G})$ comme version réduite sont alors notées $C(\mathbb{G})$. C'est le point de vue adopté dans les articles fondateurs [Wor87, Wor98]. On dit que les groupes quantiques compact et discret $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$ associés à une même C^*-algèbre de Woronowicz réduite sont duaux l'un de l'autre et on note $\mathbb{F} = \hat{\mathbb{G}}$. Cette terminologie est motivée par le cas où $\mathbb{G} = G$ est un groupe compact abélien : en effet $\mathbb{F} = \Gamma = \hat{G}$ est alors son dual de Pontrjagin.

Il existe de nombreux exemples de groupes quantiques discrets qui ne sont ni des groupes discrets, ni des duaux de groupes compacts. La classe de « groupes quantiques » la plus célèbre est probablement celle des q-déformations $U_q(\mathfrak{g})$ d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie simples [Dri87, Jim85], dans le cadre des algèbres de Hopf, qui ont eu de nombreuses applications en théorie des représentations et en physique théorique. Rosso a étudié la théorie des représentations de ces « groupes quantiques » et montré qu'ils rentrent dans le cadre des C^*-algèbres de Woronowicz [Ros90] : on peut par exemple construire pour $q \in]0,1[$ des groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_q = SU_q(N)$, $Spin_q(N)$, $Sp_q(2N)$, qui coïncident avec les groupes compacts $G = SU(N)$, $Spin(N)$, $Sp(2N)$ lorsque $q = 1$, et considérer leurs duaux. Cependant, les groupes quantiques discrets $\hat{\mathbb{G}}_q$ ne sont pas les plus intéressants du point de vue des propriétés que nous étudierons dans ce mémoire, car ils sont moyennables [Nag93, Ban99a, Sec. 6].

Les objets principaux étudiés dans ce mémoire seront les *groupes quantiques libres orthogonaux*, $\mathbb{F}O(Q)$, et *unitaires*, $\mathbb{F}U(Q)$, où le paramètre Q est une matrice inversible $Q \in GL_N(\mathbb{C})$. Leur duaux compacts sont appelés *groupes quantiques orthogonaux* et *unitaires universels* et notés $O^+(Q)$, $U^+(Q)$. Les C^*-algèbres de Woronowicz pleines associées $A_o(Q)$, $A_u(Q)$ ont été introduites par Wang et Van Daele [Wan95, VDW96] : avec les notations de ce mémoire, on a donc $A_o(Q) = C_p(O^+(Q)) = C_p^*(\mathbb{F}O(Q))$ et $A_u(Q) = C_p(U^+(Q)) = C_p^*(\mathbb{F}U(Q))$. Nous adoptons ici la définition utilisée par Banica [Ban96, Ban97], légèrement différente de celle de Wang et Van Daele :

DÉFINITION 0.1.3 *Soit $Q \in GL_N(\mathbb{C})$. On note $A_u(Q)$ la C^*-algèbre unifère engendrée par des éléments u_{ij}, $1 \leq i,j \leq N$, et les relations qui rendent unitaires les éléments u et $Q\bar{u}Q^{-1}$ de $M_N(A_u(Q))$, où $u = (u_{ij})_{ij}$ et $\bar{u} = (u_{ij}^*)_{ij}$. On note $A_o(Q)$ la C^*-algèbre unifère engendrée par des éléments u_{ij}, $1 \leq i,j \leq N$, et les relations qui rendent $u = (u_{ij})_{ij}$ unitaire dans $M_N(A_u(Q))$, et égale à $Q\bar{u}Q^{-1}$. Les C^*-algèbres $A_u(Q)$, $A_o(Q)$ deviennent des C^*-algèbres de Woronowicz pour le coproduit Δ défini par $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$.*

Lorsque $Q = I_N$ on note plus simplement $A_o(N) = C_p(O_N^+) = C_p^*(\mathbb{F}O_N)$ et $A_u(N) = C_p(U_N^+) = C_p^*(\mathbb{F}U_N)$. Dans le cas orthogonal on limite classiquement l'étude au cas où $Q\bar{Q}$ est scalaire ou, ce qui revient au même, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, où $\bar{Q}$ est la matrice obtenue en conjuguant les entrées de Q. La terminologie est motivée par le fait que les groupes quantiques discrets $\mathbb{F}O_N$, $\mathbb{F}U_N$ présentent des similitudes avec les groupes libres « classiques » F_N, notamment du point de vue des algèbres d'opérateurs associées. Ces similitudes font l'objet de plusieurs résultats qui seront présentés plus loin dans le mémoire. On peut d'ores et déjà noter les deux points suivants :

1. la *famille* $\{\mathbb{F}U(Q) \mid N \in \mathbb{N}, Q \in GL_N(\mathbb{C})\}$ est universelle au sens suivant : pour tout groupe quantique discret de type fini $\mathbb{F}$, il existe une matrice inversible Q et un morphisme surjectif de C^*-algèbres de Woronowicz $A_u(Q) \to C_p^*(\mathbb{F})$;

2. les C^*-algèbres $A_u(N)$, $N \geq 2$, et $A_o(N)$, $N \geq 3$, sont « très » non-commutatives : en envoyant sur 0 les générateurs u_{ij} tels que $i \neq j$, on obtient des morphismes surjectifs de C^*-algèbres de Woronowicz $A_u(N) \to C^*_p(F_N)$, $A_o(N) \to C^*_p((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*N})$.

Notons que pour $N = 1$ on a $\mathbb{F}U(Q) = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}O(Q) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et que pour $N = 2$ la famille des groupes quantiques discrets $\mathbb{F}O(Q)$, $Q\bar{Q} = \pm I_2$, coïncide avec celle des duaux des groupes quantiques compacts $SU_q(2)$, $q \in [-1, 1]$, $q \neq 0$ [Ban97, Prop. 7]. Ces cas « moyennables » seront systématiquement exclus dans la suite du mémoire.

Dans les autres cas, Banica a effectivement montré que $\mathbb{F}U(Q)$ et $\mathbb{F}O(Q)$ sont non moyennables [Ban97, Crl. 1, Crl. 5]. Pour $\mathbb{F}O_N$, cela se voit en considérent l'élément $\chi_1 = \sum_i u_{ii}$: en utilisant le morphisme évident $A_o(N) \to C(O_N)$, on voit que $\|\chi_1\| = N$ dans $A_o(N)$, mais d'autre part Banica calcule les moments de χ_1 relativement à l'état de Haar h et en déduit que l'image de $\chi_1/2$ dans la C^*-algèbre réduite $\lambda(A_o(N))$ est une « variable semi-circulaire », et en particulier $\|\lambda(\chi_1)\| = 2$ [Ban97, Prop. 1].

Il est facile de définir le produit libre $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$ de deux groupes quantiques discrets, par exemple en posant $C^*_r(\mathbb{F}) = C^*_r(\mathbb{F}_0) *_r C^*_r(\mathbb{F}_1)$, où on prend le produit libre réduit relativement aux états de Haar, muni de l'unique coproduit prolongeant ceux de $C^*_r(\mathbb{F}_0)$ et $C^*_r(\mathbb{F}_1)$. On adopte alors la terminologie suivante : on appelle *groupe quantique libre* un groupe quantique discret $\mathbb{F}$ produit libre de groupes quantiques $\mathbb{F}O(Q_i)$, $\mathbb{F}U(R_j)$ avec Q_i, R_j inversibles et $Q_i\bar{Q}_i = \pm I$.

4. Rappelons qu'un groupe quantique discret $\mathbb{F}$ est dit *moyennable* **ssi** $\lambda : C^*(\mathbb{F}) \to C^*_r(\mathbb{F})$ est un isomorphisme pour toute C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{F})$ associée à $\mathbb{F}$ — et il suffit en fait de considérer la C^*-algèbre pleine $C^*(\mathbb{F}) = C^*_p(\mathbb{F})$. Il est facile de voir que cela équivaut au fait que la co-unité est bornée sur $C^*_r(\mathbb{F})$, ou que l'état de Haar est fidèle sur $C^*_p(\mathbb{F})$. On a également des caractérisations de type « Kesten » [Ban99a, Thm. 6.1] : dans le cas de type fini, $\mathbb{F}$ est moyennable **ssi** $\dim v \in \operatorname{Sp} \lambda(\chi_v)$, où $\chi_v \in C^*_p(\mathbb{F})$ est le caractère d'une coreprésentation génératrice v, cf la section suivante.

Une moyenne invariante sur $\mathbb{F}$ est un état (non normal) invariant (à droite ou à gauche) sur $L^\infty(\mathbb{F}) = C_b(\mathbb{F})$. Si $\mathbb{F}$ est moyennable au sens précédent, en étendant la co-unité de $C^*_r(\mathbb{F})$ à $B(\ell^2\mathbb{F})$, puis en restreignant à $L^\infty(\mathbb{F})$, on obtient une moyenne invariante sur $\mathbb{F}$. On dit que $\mathbb{F}$ est *moyennable au sens faible* si $L^\infty(\mathbb{F})$ admet une moyenne invariante [Voi79]. Pour les groupes localement compacts, il est bien connu que la moyennabilité au sens faible est équivalente à la moyennabilité au sens précédent. On ignore si c'est le cas en général pour les groupes quantiques localement compacts, cependant pour les groupes quantiques discrets le résultat est connu [Tom06, Thm. 3.8].

Par ailleurs, rappelons qu'une C^*-algèbre A est dite *nucléaire* si pour tout C^*-algèbre B les produits tensoriels minimal et maximal coïncident : $A \otimes_{\max} B \simeq A \otimes B$. D'autre part une algèbre de von Neumann $M \subset B(H)$ est *injective* s'il existe une projection de norme 1 de $B(H)$ sur M. On montre que l'existence d'une moyenne invariante sur $\mathbb{F}$ implique la nucléarité de $C^*_r(\mathbb{F})$, cf par exemple [BMT03, Crl. 4.3], ainsi que l'injectivité de $\mathscr{L}(\mathbb{F})$. Dans le cas des groupes discrets usuels, on sait que la nucléarité de $C^*_r(\mathbb{F})$ ou l'injectivité de $\mathscr{L}(\mathbb{F})$ sont équivalentes à la moyennabilité de $\mathbb{F}$. Dans le cas quantique, cette équivalence n'est connue que pour les groupes quantiques discrets *unimodulaires* [Rua96, Prop. 4.6].

Enfin, il s'avère que la moyennabilité ne dépend que de l'anneau de fusion $R(\mathbb{F})$ et de la fonction dimension $\dim : R(\mathbb{F}) \to \mathbb{Z}$ [Ban99a, Prop. 6.1], cf la section suivante et plus précisément le théorème 0.2.6. On peut en fait formuler la moyennabilité entièrement au niveau de $(R(\mathbb{F}), \dim)$ [Kye08a, Thm. 4.5], et on a alors des caractérisations de la moyennabilité dans $R(\mathbb{F})$ de type Følner [HI98, 4.6].

Coreprésentations et graphes de Cayley classiques

Dans cette section, on introduit la catégorie des coreprésentations d'un groupe quantique discret ainsi que les notions de règles de fusion et d'équivalence monoïdale. On présente également deux lemmes techniques concernant ces catégories qui sont utiles pour l'étude des algèbres d'opérateurs associées à $\mathbb{F}O(Q)$, et on introduit la notion de graphe de Cayley classique d'un groupe quantique discret.

1. On commence par introduire la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, l'anneau de fusion $R(\mathbb{\Gamma})$, et par discuter les questions de classification associées.

Définition 0.2.4 *Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret, $\mathbb{G}$ son dual compact, et A une C^*-algèbre de Woronowicz. On appelle* coreprésentation *de A sur un espace de Hilbert H un élément $v \in M(K(H) \otimes A)$ tel que $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(v) = v_{12}v_{13}$. On appelle* coreprésentation *de $\mathbb{\Gamma}$, ou représentation de $\mathbb{G}$, une coreprésentation de $C^*_r(\mathbb{\Gamma}) = C_r(\mathbb{G})$. On note* $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ *la catégorie des coreprésentations unitaires de dimension finie de $\mathbb{\Gamma}$.*

Pour toute C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{\Gamma})$ on peut alors construire une sous-$*$-algèbre de Hopf dense naturelle $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \subset C^*(\mathbb{\Gamma})$ comme suit. On appelle *coefficient* d'une coreprésentation v un élément du type $(\zeta \otimes 1 | v(\xi \otimes 1)) \in C^*(\mathbb{\Gamma}) = C(\mathbb{G})$, et on note $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ le sous-espace de $C^*(\mathbb{\Gamma}) = C(\mathbb{G})$ engendré par les coefficients de toutes les coreprésentations de dimension finie de $C^*(\mathbb{\Gamma})$. Woronowicz montre que le sous-espace $\mathbb{C}[\mathbb{G}]$ est une sous-$*$-algèbre dense de $C^*(\mathbb{\Gamma})$ [Wor98, Thm. 1.2], sur laquelle la représentation régulière λ est fidèle. En particulier la $*$-algèbre $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, et la catégorie des coreprésentation de $C^*(\mathbb{\Gamma})$, ne dépendent pas de la C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{\Gamma})$ associée à $\mathbb{\Gamma}$ choisie.

La $*$-algèbre $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ est en fait munie d'une structure de $*$-algèbre de Hopf par restriction du coproduit Δ : autrement dit $\Delta(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}])$ est contenu dans le produit tensoriel algébrique $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, et il existe une co-unité $\epsilon : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}$ et une antipode $S : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ relativement à Δ. On vérifie par ailleurs que $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ admet une C^*-algèbre enveloppante $C^*_p(\mathbb{\Gamma})$, dite *C^*-algèbre pleine* de $\mathbb{\Gamma}$, à laquelle s'étend le coproduit Δ. Le *caractère* d'une coreprésentation $v \in \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ est $\chi_v = (\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{id})(v) \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \subset C^*_p(\mathbb{\Gamma}) = C_p(\mathbb{G})$.

Dans le cas où $\mathbb{\Gamma}$ est dual d'un groupe compact usuel G, les coreprésentations de $\mathbb{\Gamma}$ correspondent aux représentations (fortement continues) de G via l'identification $M(K(H) \otimes C(G)) \simeq C(G, B(H))$. En général, la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ jouit de propriétés similaires à celles des catégories de représentations unitaires de dimension finie des groupes compacts. On a notamment un analogue de la théorie de Peter-Weyl qui fournit le théorème de décomposition ci-dessous.

Théorème 0.2.5 [Wor98] *Toute coreprésentation de $\mathbb{\Gamma}$ est somme directe de coreprésentations de dimension finie. La catégorie* $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ *est semi-simple.*

La catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ est une C^*-catégorie : c'est une catégorie $\mathbb{C}$-linéaire, abélienne, dont les espaces de morphismes sont munis de normes et d'involutions ($\mathrm{Hom}(u, v) \to \mathrm{Hom}(v, u), f \mapsto f^*$) vérifiant les propriétés usuelles, notamment $\|f^*f\| = \|f\|^2$. On peut de plus définir le produit tensoriel de deux coreprésentations, $u \otimes v = u_{13}v_{23}$: cela munit $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ d'une structure de *C^*-catégorie monoïdale* [DR89, Sec. 1]. La coreprésentation triviale $1 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes 1_{C^*(\mathbb{\Gamma})}$ est un objet neutre, et on montre que $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ est rigide : toute coreprésentation v admet une coreprésentation duale $\bar{v}$ caractérisée par l'existence de morphismes $t_v : 1 \to v \otimes \bar{v}$ et $t'_v : 1 \to \bar{v} \otimes v$ satisfaisant les relations usuelles. On dit que deux groupes quantiques discrets sont *monoïdalement équivalents* si les catégories associées sont $*$-monoïdalement équivalentes [BDRV06, Def. 3.1, Rk. 3.5].

Notons Hilb la C^*-catégorie monoïdale des espaces de Hilbert de dimension finie. On définit un $*$-foncteur monoïdal $\mathcal{F} : \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Hilb}$ en associant à toute coreprésentation de dimension finie $v \in L(H) \otimes C^*(\mathbb{\Gamma})$ l'espace de Hilbert associé H. Ce foncteur est appelé *foncteur fibre* de $\mathbb{\Gamma}$. On montre que deux groupes quantiques discrets $\mathbb{\Gamma}_1, \mathbb{\Gamma}_2$ sont isomorphes (c'est-à-dire que les C^*-algèbres de Woronowicz $C^*_r(\mathbb{\Gamma}_1)$, $C^*_r(\mathbb{\Gamma}_2)$ sont isomorphes) si et seulement s'il existe une équivalence de C^*-catégories monoïdales $\mathcal{E} : \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}_1 \to \mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}_2$ qui échange les foncteurs fibre : $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{E} \simeq \mathcal{F}_1$. On montre de plus que toute C^*-catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, avec sous-objets, sommes directes et duaux, munie d'un $*$-foncteur monoïdal $\mathcal{C} \to \mathrm{Hilb}$, provient d'un groupe quantique compact comme précédemment [Wor88].

La catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ étant semi-simple, l'ensemble $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ des classes d'équivalences de ses objets simples joue un rôle important et permet notamment de définir des invariants algébriques pour $\mathbb{\Gamma}$. Notant $R(\mathbb{\Gamma})$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$, le produit tensoriel des coreprésentations définit une structure d'anneau sur $R(\mathbb{\Gamma})$, qui est appelé *anneau de fusion* de $\mathbb{\Gamma}$. Cet anneau est muni de la base canonique donnée par les éléments de $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$, ainsi que de deux morphismes d'anneaux $\dim : R(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{Z}$ et $\mathrm{qdim} : R(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{R}$. Le premier est donné par $\dim v = \dim H_v$ pour $v \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$. Le deuxième est la *dimension quantique*, qui provient de la structure monoïdale de $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, et plus précisément des morphismes de dualité $1 \to v \otimes \bar{v}, \bar{v} \otimes v$ pour $v \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$.

Dans le cas où $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ est un groupe discret usuel, on peut identifier $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ à Γ en associant à $g \in \Gamma$ la coreprésentation $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes g$ de $\mathbb{\Gamma}$. De plus, le produit tensoriel des coreprésentations irréductibles correspond à la loi de groupe de Γ — en particulier $R(\mathbb{\Gamma}) = \mathbb{Z}[\Gamma]$ est l'anneau du groupe Γ. Dans ce cas on a $\dim(g) = \mathrm{qdim}(g) = 1$ pour tout $g \in \Gamma = \mathrm{Irr}\,\Gamma$. Si $\mathbb{\Gamma}$ est le dual d'un groupe compact usuel, on a également $\dim = \mathrm{qdim}$, mais ce n'est pas le cas en général : en fait on montre que $\dim = \mathrm{qdim}$ sur $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ **ssi** $\mathbb{\Gamma}$ est unimodulaire.

Lorsque $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ vérifiant $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 2$, l'anneau de fusion $R(\mathbb{\Gamma})$ a été déterminé par Banica [Ban96, Thm. 1]. Notons tout d'abord que la condition $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_N$ (qui implique $Q\bar{Q} \in \mathbb{R}I_N$) correspond à l'irréductibilité de la coreprésentation $u \in L(\mathbb{C}^N) \otimes A_o(Q) \simeq M_N(A_o(Q))$ donnée par la matrice des générateurs u_{ij}. On peut alors indexer les éléments $r_k \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}O(Q)$ par les entiers naturels $k \in \mathbb{N}$ de manière à avoir $r_0 = 1$, $r_1 = u$, $\bar{r}_k \simeq r_k$, et les règles de fusion

$$r_k \otimes r_l \simeq r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}.$$

La dimension et la dimension quantique se calculent facilement par récurrence. On a $\dim 1 = \mathrm{qdim}\, 1 = 1$, $\dim u = N$. Par ailleurs, en supposant Q normalisée de manière à ce que $Q\bar{Q} = \pm I_N$, on a $\mathrm{qdim}\, u = \mathrm{Tr}(Q^*Q) = \mathrm{Tr}((Q^*Q)^{-1}) \geq N$. Si on pose $\mathrm{qdim}\, u = q + q^{-1}$ avec $q \in]0, 1]$, les dimensions quantiques des irréductibles sont alors données par les q-nombres

$$\mathrm{qdim}\, r_k = [k+1]_q = \frac{q^{-k-1} - q^{k+1}}{q^{-1} - q},$$

tandis que $\dim r_k = [k+1]_p$ où $p + p^{-1} = N$. Pour $N = 2$ on a $\dim r_k = k + 1$. On voit en particulier que pour $Q\bar{Q} = \pm I_N$, le groupe quantique discret $\mathbb{F}O(Q)$ est unimodulaire **ssi** Q est unitaire.

On aura reconnu ci-dessus les règles de fusion des représentations irréductibles de $SU(2)$. En fait Banica montre que tout groupe quantique discret qui vérifie ces règles de fusion est isomorphe à un groupe $\mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$ [Ban96, Thm. 2]. Cela inclut les duaux des groupes quantiques compacts $SU_q(2)$, qui correspondent au cas $N = 2$. On peut montrer de plus que $\mathbb{F}O(Q_1)$, $\mathbb{F}O(Q_2)$ sont monoïdalement équivalents **ssi** leurs coreprésentations fondamentales $r_1 = u$ ont même dimension quantique et si les « signes » de $Q_1\bar{Q}_1$,

$Q_2\bar{Q}_2$ sont égaux [BDRV06, Crl. 5.4] — en particulier tout groupe $\mathbb{F}O(Q)$, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, est monoïdalement équivalent au dual d'un groupe $SU_q(2)$, $q \in [-1, 1]$, $q \neq 0$. Enfin, il est facile de voir que $\mathbb{F}O(Q_1)$, $\mathbb{F}O(Q_2)$ avec $Q_i\bar{Q}_i = \pm I_{N_i}$ sont isomorphes **ssi** $N_1 = N_2$ et il existe une matrice unitaire U telle que $Q_2 = UQ_1{}^tU$. On voit notamment qu'en général les règles de fusion ne déterminent pas la C^*-catégorie monoïdale, qui elle-même ne détermine pas le groupe quantique discret.

2. Les questions de classification évoquées précédemment, et des questions reliées, sont importantes et hautement non triviales en général, mais nous ne les abordons pas dans ce mémoire. Pour nous, la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ et l'anneau $R(\mathbb{\Gamma})$ sont avant tout des outils utiles pour l'étude des algèbres d'opérateurs associées à $\mathbb{\Gamma}$. Notons que $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ permet ainsi de décrire la C^*-algèbre duale $L^\infty(\mathbb{\Gamma}) = C_b(\mathbb{\Gamma})$ évoquée dans la section précédente : on a

$$C_b(\mathbb{\Gamma}) \simeq \ell^\infty\text{-}\bigoplus\{L(H_r) \mid r \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}\}.$$

Ainsi $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$ est également la catégorie des $*$-représentations de dimension finie de la C^*-algèbre $C_b(\mathbb{\Gamma})$, et la structure monoïdale correspond au coproduit de $C_b(\mathbb{\Gamma})$. On note p_r la projection centrale minimale de $C_b(\mathbb{\Gamma})$ associée à $r \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$, et on introduit $C_0(\mathbb{\Gamma})$ (resp. $C_c(\mathbb{\Gamma})$) comme la somme directe c_0 (resp. algébrique) des sous-algèbres $p_rC_b(\mathbb{\Gamma})$.

On voit que la C^*-algèbre $C_b(\mathbb{\Gamma})$ présente peu d'intérêt du point de vue des algèbres d'opérateurs. Cependant la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{\Gamma}$, et notamment sa structure monoïdale, permettent également d'étudier les propriétés des C^*-algèbres $C^*(\mathbb{\Gamma})$. Un résultat typique dans cette direction est le suivant :

Théorème 0.2.6 [Ban99a, Prop. 6.1] *Soit $\mathbb{\Gamma}_1$, $\mathbb{\Gamma}_2$ deux groupes quantiques discrets ayant les mêmes règles de fusion : on suppose qu'il existe un isomorphisme $f : R(\mathbb{\Gamma}_1) \to R(\mathbb{\Gamma}_2)$ des anneaux de fusion munis de leurs bases canoniques. On suppose Γ_1 moyennable. Alors on a $\dim f(r) \geq \dim r$ pour tout $r \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}_1$, avec égalité pour tout r **ssi** $\mathbb{\Gamma}_2$ est moyennable.*

Il est facile de voir que le dual de $SU(2)$ est moyennable — la mesure de Haar est fidèle sur $C(SU(2))$ —, et on peut donc déduire du théorème ci-dessus que les duaux des groupes compacts $SU_q(2)$ sont moyennables, mais pas les groupes quantiques $\mathbb{F}O(Q)$ pour $Q \in GL_N(\mathbb{C})$, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$. Cependant, en général la connaissance des règles de fusion et des dimensions n'est pas suffisamment fine pour l'étude des propriétés que nous étudierons : on aura besoin de connaître la catégorie des coreprésentations à équivalence monoïdale près, c'est-à-dire la *géométrie* des règles de fusion.

Illustrons ce point de vue par un exemple dans le cas des groupes quantiques $\mathbb{F}O(Q)$. D'après les règles de fusion rappelées précédemment, on a $r_1 \otimes r_k \otimes r_1 \simeq r_{k-2} \oplus r_k \oplus r_k \oplus r_{k+2}$. Les deux copies de r_k peuvent s'obtenir par exemple comme suit : considérons deux morphismes injectifs $\phi_l : r_{k+1} \to r_1 \otimes r_k$, $\phi_r : r_{k+1} \to r_k \otimes r_1$ — chacun est unique à un scalaire près. Alors les images de $\phi_l \otimes \mathrm{id}_{r_1}$ et $\mathrm{id}_{r_1} \otimes \phi_r$ sont deux sous-objets de $r_1 \otimes r_k \otimes r_1$ respectivement isomorphes à $r_{k+1} \otimes r_1$ et $r_1 \otimes r_{k+1}$, ils contiennent donc chacun un unique sous-objet isomorphe à r_k. Ces sous-objets irréductibles H_l, H_r de $r_1 \otimes r_k \otimes r_1$ sont en général distincts et non-orthogonaux, l'angle qu'ils forment est un invariant de la C^*-catégorie monoïdale qui n'est pas déterminé par les règles de fusion :

Lemme 0.2.7 [2, Lem. 2.5, cas $k' = 1$] *Soit p la projection orthogonale sur H_r, restreinte à H_l. Modulo un isomorphisme isométrique entre H_r et H_l, le morphisme p est un scalaire déterminé à une phase près. Alors on a $\|p\|^{-1} = \mathrm{qdim}\, r_k$.*

Ce résultat, et d'autres résultats analogues, sont démontrés dans [2] en construisant des morphismes explicites dans $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}O(Q)$ par une méthode analogue aux formules de récurrence de Wenzl dans les catégories de Temperley-Lieb. En fait certaines formules étaient déjà connues des algébristes, cf par exemple [FK97], modulo l'équivalence monoïdale avec les duaux des groupes quantiques $SU_q(2)$, mise en évidence plus tard dans [BDRV06]. Pour les applications aux questions analytiques, on doit souvent étudier le comportement asymptotique des formules obtenues : par exemple dans le lemme ci-dessus on voit que les deux sous-objets H_l, H_r de $r_1 \otimes r_k \otimes r_1$ deviennent « presque égaux » lorsque k devient grand, bien que la multiplicité de r_k soit toujours égale à 2. Dans [4] nous démontrons le résultat plus fort suivant :

Lemme 0.2.8 [4, Lem. A.4] *On considère la catégorie* $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}O(Q)$ *avec* $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$. *Notons* $p_{k,l}$ *(resp.* $p_{k,l,m}$*) la projection orthogonale sur l'unique sous-objet de* $r_k \otimes r_l$ *(resp.* $r_k \otimes r_l \otimes r_m$*) isomorphe à* r_{k+l} *(resp.* r_{k+l+m}*). Alors il existe une constante* C*, dépendant seulement de* q*, telle que*

$$\|(p_{k,l} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes p_{l,m}) - p_{k+l+m}\| \leq C q^l.$$

3. À partir des règles de fusion d'un groupe quantique discret, on peut introduire un invariant combinatoire qui généralise la notion de graphe de Cayley. Soit Γ un groupe discret usuel, muni d'un sous-ensemble D stable par inversion et ne contenant pas l'élément neutre. On rappelle que les sommets du graphe de Cayley (à droite) associé à (Γ, D) sont les éléments de Γ, et que ses arêtes orientées sont les couples $(g, h) \in \Gamma^2$ tels que $h \in gD$. Les applications but, origine et retournement sont les applications évidentes. Comme les éléments de Γ correspondent à ses coreprésentations irréductibles, la notion de graphe de Cayley peut se généraliser de manière naïve au cas quantique, comme suit :

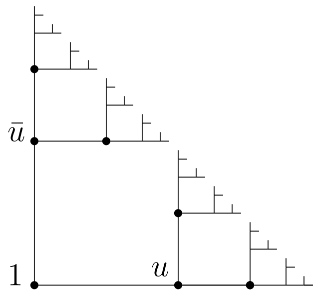
Définition 0.2.9 [2, Def. 3.1(1)] *Soit* $\mathbb{\Gamma}$ *un groupe quantique discret et* D *un sous-ensemble de* $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ *stable par dualité et ne contenant pas la coreprésentation triviale. Le* graphe de Cayley classique *associé à* $(\mathbb{\Gamma}, D)$ *est donné par*

– *l'ensemble de sommets* $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$,
– *l'ensemble d'arêtes* $\{(r, s) \in (\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma})^2 \mid \exists t \in D \ s \subset r \otimes t\}$,

et les applications but, origine et retournement évidentes.

On peut raffiner légèrement cette notion en prenant en compte la multiplicité des inclusions $s \subset r \otimes t$ pour tracer des arêtes multiples, ou en colorant une arête (r, s) par la *direction* $t \in D$ associée. De plus on peut associer à chaque sommet r sa dimension $\dim r$, voire sa dimension quantique. Notons que dans le cas classique, ces dimensions valent 1, de plus la direction t d'une arête (r, s) est déterminée par r et s et il n'y a pas de multiplicité. Par ailleurs, il est clair que le graphe de Cayley classique associé à $(\mathbb{\Gamma}, D)$ est connexe **ssi** D engendre $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ par produits tensoriels et inclusions. On dit que $\mathbb{\Gamma}$ est *de type fini* s'il existe une partie génératrice finie $D = \bar{D} \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$.

Dans le cas de $\mathbb{F}O(Q)$, il est naturel de prendre $D = \{r_1\}$ et (une réalisation géométrique de) le graphe de Cayley correspondant est la demie-droite avec sommets aux entiers. Dans le cas de $\mathbb{F}U(Q)$, les règles de fusion ont été déterminées par Banica [Ban97]. Il est naturel de prendre comme éléments de D la matrice u des générateurs et la matrice $\bar{u}$ de leurs adjoints, qui sont des coreprésentations irréductibles, et on obtient le graphe de Cayley suivant :



On note l'analogie avec le graphe de Cayley du groupe libre $F_2 = \langle a, b\rangle$ à deux générateurs, muni de $D = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Dans le cas d'un groupe discret Γ, le graphe de Cayley est un outil important pour l'étude des propriétés géométriques de Γ, mais aussi pour l'étude des algèbres d'opérateurs associées. On peut par exemple caractériser la moyennabilité d'un groupe Γ de type fini, muni d'un ensemble fini D de générateurs, en termes d'expansion des parties finies de son graphe de Cayley (ensembles de Følner), ou à l'aide du spectre du laplacien discret sur son graphe de Cayley.

Dans le cas quantique, l'intérêt du graphe de Cayley classique est moins clair, car il n'est pas muni d'une action naturelle du groupe quantique discret. On introduira plus loin une notion de graphe de Cayley *quantique*, ce qui explique la terminologie. Cependant on peut déjà donner une notion satisfaisante de croissance d'un groupe quantique discret :

Définition 0.2.10 [3, Rem. 4.2] *Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret de type fini. On note d la distance dans le graphe de Cayley associé à une partie génératrice finie de $\mathrm{Irr}\,\mathbb{\Gamma}$ et on pose $s_n = \sum\{\mathrm{qdim}(r)^2 \mid d(1, r) = n\}$. On dit que $\mathbb{\Gamma}$ est à croissance polynômiale s'il existe un polynôme P tel que $s_n \leq P(n)$ pour tout n.*

Bien entendu, le carré dans la formule pour s_n n'est pas essentiel pour la notion de croissance polynômiale : il provient de la définition plus conceptuelle donnée dans [3, Def. 4.1]. Il est néanmoins crucial de faire intervenir les dimensions des coreprésentations r, comme le montre le cas des groupes $\mathbb{F}O(N)$: dans ce cas on a $d(1, r) = n$ **ssi** $r = r_n$, ainsi $\mathbb{F}O(N)$ est à croissance polynômiale **ssi** $N \leq 2$, ce qui est naturel car $\mathbb{F}O(N)$ est moyennable **ssi** $N \leq 2$. Notons par ailleurs que la notion de croissance polynômiale ne dépend pas de la partie génératrice choisie, qu'on peut toujours supposer stable par dualité et ne contenant pas la triviale. La définition est également motivée par le résultat suivant, bien connu dans le cas classique :

Proposition 0.2.11 [3, Prop. 4.4] et [BV09, Prop. 2.1] *Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret de type fini. Alors $\mathbb{\Gamma}$ est à croissance polynômiale **ssi** $\mathbb{\Gamma}$ est moyennable et a la propriété de décroissance rapide (relativement à la distance à l'origine dans le graphe de Cayley).*

On discutera la propriété de décroissance rapide dans la section 2.2.1 de ce mémoire. Les principaux exemples de groupes quantiques discrets à croissance polynômiale sont les duaux $\hat{\mathbb{G}}$ des groupes de Lie compacts simples — l'exposant de croissance est calculé dans [BV09, Section 2]. Un exemple non commutatif et non cocommutatif sera étudié à la section 1.1.1.

1 Outils combinatoires, géométriques, probabilistes

1.1 Détermination de règles de fusion

Dans cette section nous présentons les résultats de [5, 6] où nous déterminons les règles de fusion de deux familles de groupes quantiques discrets : les (duaux des) groupes orthogonaux semi-libérés et les (duaux des) groupes de réflexions complexes quantiques. Cela permet notamment de tracer les graphes de Cayley classiques correspondant. Ces deux familles de groupes quantiques sont de natures très différentes : les premiers sont à croissance polynômiale, tandis que les seconds sont non moyennables.

1. Les groupes quantiques orthogonaux semi-libérés $\mathbb{G} = O_N^*$ sont des groupes quantiques compacts introduits dans l'article [BS09], dont l'objectif était la recherche et la classification d'un certain type de quotients, dits « faciles », intermédiaires entre le groupe quantique discret $\mathbb{F}O_N$ et le dual du groupe de permutation S_N.

Définition 1.1.1 [BS09, Def. 6.6, Thm. 6.9] *On note $A_o^*(N)$ le quotient de $A_o(N)$ par les relations du type $abc = cba$, où a, b, c parcourent l'ensemble des générateurs u_{ij}. Le coproduit de $A_o(N)$ passe au quotient, et on appelle* groupe quantique orthogonal semi-libéré *d'ordre N, noté O_N^*, le groupe quantique compact associé à $A_o^*(N)$.*

Notons que le quotient de $A_o(N)$ par les relations faisant commuter les générateurs u_{ij} est clairement $C(O_N)$, munie du coproduit provenant du produit du groupe O_N. Cela justifie les notations $A_o(N) = C(O_N^+)$, $A_o^*(N) = C(O_N^*)$. Il s'avère que O_N^* présente de fortes analogies, que nous allons développer ci-dessous, avec les groupes de Lie compacts usuels : cela explique pourquoi nous préférons parler ici du groupe quantique compact O_N^* plutôt que de son dual discret. Le résultat principal de [BS09] concernant O_N^* est une description combinatoire des espaces de morphismes $\mathrm{Hom}(u^{\otimes k}, u^{\otimes l}) \subset L(\mathbb{C}^{kN}, \mathbb{C}^{lN})$, à l'aide d'un certain type de partitions de $(k+l)$ points [BS09, Thm. 6.9].

L'analogie avec la théorie des groupes de Lie classiques a en fait lieu au niveau du groupe unitaire $U_N \subset M_N(\mathbb{C})$. Pour le voir on considère la sous-C^*-algèbre de Woronowicz $PA_o^*(N) \subset A_o^*(N)$ engendrée par les produits de deux générateurs u_{ij}. Cette C^*-algèbre est clairement commutative, donc elle correspond à un groupe compact. En utilisant la description combinatoire des espaces de morphismes $\mathrm{Hom}(u^{\otimes k}, u^{\otimes l})$ et la description analogue pour U_N, il n'est pas difficile de voir que le groupe compact correspondant à $PA_o^*(N)$ est le groupe projectif unitaire PU_N. Ainsi O_N^* apparaît en fait comme un « revêtement quantique » du groupe compact usuel PU_N.

L'outil principal que nous utilisons dans [6] pour l'étude des représentations de O_N^* est un réseau des poids non-commutatifs. Dans le cas d'un groupe de Lie compact connexe G, le réseau des poids X est le dual d'un tore maximal $T \subset G$, qui est en particulier un sous-groupe commutatif maximal. En termes C^*-algébriques, cela se traduit par un quotient de C^*-algèbres de Woronowicz $C(G) \twoheadrightarrow C(T) \simeq C^*(X)$, qui est co-commutatif maximal. Pour certains groupes de Lie $G \subset U_N$, et en particulier pour U_N lui-même, on obtient un tore maximal en considérant le sous-groupe formé par les matrices diagonales. Dans le cas de O_N^* on a :

Proposition 1.1.2 [6, Thm. 5.1, Prop. 6.1] *Soit L le* groupe diagonal *associé à $(A_o^*(N), u)$, c'est-à-dire le groupe discret tel que $A_o^*(N)/\langle u_{ij}, i \neq j\rangle \simeq C^*(L)$. Alors*

1. *$A_o^*(N) \twoheadrightarrow C^*(L)$ est un quotient co-commutatif maximal,*
2. *L s'identifie naturellement à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/2$ isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}/2$.*

Ici $\mathbb{Z}/2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^{n-1}$ via $-\mathrm{id}$.

Dans le cas classique le réseau des poids X permet de classifier les représentations de G. Plus précisément, toute représentation v de G induit via la flèche $C(G) \twoheadrightarrow C^*(X)$ une coreprésentation du groupe discret X, dont la décomposition en irréductibles fournit un sous-ensemble avec multiplicités de X : c'est l'ensemble $P(v)$ des poids de v. La même construction fonctionne clairement pour tout quotient co-commutatif d'une C^*-algèbre de Woronowicz. Le résultat suivant montre que les ensembles de poids dans L classifient les représentations de O_N^* et donc que, du point de vue de la théorie des représentations, le groupe diagonal L associé à O_N^* peut être considéré comme un réseau des poids, ou encore que son dual peut être considéré comme un tore maximal quantique :

Théorème 1.1.3 [6, Thm. 6.2] *Soit L le groupe diagonal de O_N^*, et v, w deux représentations de O_N^*. Si on a $P(v) = P(w)$ comme sous-ensembles avec multiplicités de L, alors v et w sont équivalentes.*

En général il peut arriver que le groupe diagonal soit trop petit pour classifier les représentations d'un groupe quantique compact — déjà dans le cas classique. Cependant tout quotient co-commutatif d'une C^*-algèbre de Woronowicz peut être « diagonalisé » : à conjugaison près de la matrice génératrice u par une matrice inversible, ce quotient peut être factorisé à travers le « quotient diagonal ». Par ailleurs, on peut vérifier que le théorème 1.1.3 est également vrai pour O_N^+ et U_N^+. Cela amène la question 1.1.4 ci-dessous. Notons qu'en général les représentations d'un groupe fini ne peuvent pas être classifiées par un unique sous-groupe commutatif maximal, ainsi on attend une réponse incluant une hypothèse de connexité.

Question 1.1.4 Sous quelles hypothèses un groupe quantique compact admet-il un sous-groupe commutatif maximal qui classifie ses représentations ? □

La structure de groupe de L intervient lorsqu'on s'intéresse aux règles de fusion de O_N^*. En effet on a clairement $P(v \otimes w) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in P(v), \mu \in P(w)\}$, et ainsi le résultat précédent donne en principe un outil pour étudier ces règles de fusion. En fait on peut pousser plus loin l'analogie avec les groupes de Lie classiques en classifiant les représentations irréductibles de O_N^* à l'aide de plus hauts poids, et en ramenant les règles de fusion de O_N^* à celles de U_N. Notons X le réseau des poids de U_N, X_+ l'ensemble des poids positifs, X_{++} celui des poids dominants. On peut définir une injection naturelle $\psi : L \to X$ qui correspond dans les identifications $L \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/2$, $X \simeq \mathbb{Z}^n$ à oublier la composante dans $\mathbb{Z}/2$.

Théorème 1.1.5 [6, Thm. 7.4, Thm. 8.1] *On pose $L_+ = \psi^{-1}(X_+)$, $L_{++} = \psi^{-1}(X_{++})$, et on définit un ordre partiel invariant à droite sur L en posant $x \geq y \iff xy^{-1} \in L_+$. Alors :*

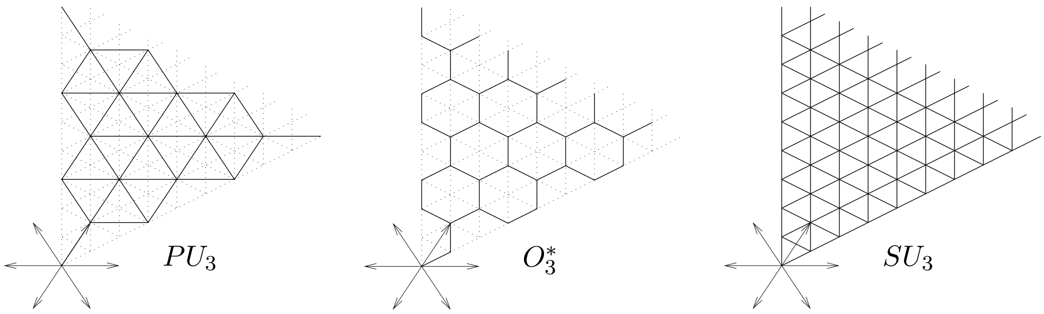
1. *Pour toute représentation irréductible v de O_N^*, $P(v)$ admet un unique élément maximal λ_v, appelé plus haut poids de v.*
2. *Pour v, w irréductibles on a $v \simeq w$ **ssi** $\lambda_v = \lambda_w$.*
   L'ensemble des plus hauts poids est L_{++}.

En particulier ψ induit une injection $\psi : \operatorname{Irr} O_N^* \to \operatorname{Irr} U_N$. Les règles de fusion de O_N^* se déduisent alors comme suit de celles de U_N : pour v, $w \in \operatorname{Irr} O_N^*$ on a

$$\psi(v \otimes w) \simeq \psi(v) \otimes \psi(w)^v,$$

où on note $\psi(w)^v = \psi(w)$ si $\psi(v)$ se factorise en une représentation de PU_N, $\psi(w)^v = \overline{\psi(w)}$ sinon.

En corollaire du résultat précédent on peut montrer que les règles de fusion de O_N^* sont non commutatives pour $N \geq 3$, ce qui est inattendu car O_N^* est un sous-groupe quantique compact intermédiaire entre O_N^+ et O_N, dont les règles de fusion sont commutatives. On en déduit également que le groupe quantique discret dual de O_N^* est à croissance polynômiale, donc moyennable. Enfin, on peut décrire le graphe de Cayley associé au dual de O_N^* muni de la coreprésentation génératrice u. Pour $N = 3$ on obtient la figure suivante, en projetant sur le réseau des poids de SU_3 :



Les flèches représentent le système de racines de SU_3. Ces graphes de Cayley n'ont pas de multiplicité ni de boucles, sauf celui de PU_3 qui a deux boucles (non représentées) à chaque sommet différent de l'origine.

Notons enfin que la construction de O_N^* et la détermination de ses règles de fusion ont été généralisées par Bichon et Dubois-Violette [BDV12]. Plus précisément, à tout sous-groupe compact $G \subset U_N$ stable par transposition ils associent une C^*-algèbre de Woronowicz $C^*(\mathbb{G})$ engendrée par les coefficients $u_{ij} = u_{ij}^*$ d'une coreprésentation satisfaisant les relations $abc = cba$. Par une méthode différente de celle de [6], ils déterminent ensuite les règles de fusion de $\mathbb{G}$ en fonction de celles de G.

2. Dans [5] nous déterminons les règles de fusion des groupes de réflexions complexes quantiques H_N^{s+}. Pour motiver l'introduction de ces groupes quantiques, commençons par présenter la définition des groupes de permutations quantiques S_N^+ et la notion de produit en couronne libre. On rappelle qu'un élément p d'une C^*-algèbre est appelé projection s'il vérifie les relations $p^2 = p = p^*$.

Définition 1.1.6 [Wan98, Sec. 3] *On note $A_s(N)$ la C^*-algèbre unifère engendrée par des* projections *v_{ij}, et les relations qui rendent $v = (v_{ij})_{ij}$ et $\bar{v} = (v_{ij}^*)_{ij}$ unitaires. Elle devient une C^*-algèbre de Woronowicz pour le coproduit Δ défini par $\Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}$. On note S_N^+ le groupe quantique compact correspondant, appelé* groupe de permutation quantique.

Remarquons que si les v_{ij} sont des projections, le fait que v et $\bar{v}$ sont unitaires revient à dire que les sommes des lignes et des colonnes de la matrice v sont égales à 1. Si on quotiente $A_s(N)$ par les relations qui font commuter les générateurs, on obtient clairement la C^*-algèbre de Woronowicz $C(S_N)$, où S_N est identifié au groupe des matrices de permutations : cela justifie la terminologie.

Dans [Wan98, Ban99b] les auteurs considèrent plus généralement le groupe d'automorphismes quantique, donné par une C^*-algèbre de Woronowicz notée $A_{aut}(B)$, d'une C^*-algèbre de dimension finie B munie de la « trace de Markov » donnée par l'inclusion $B \subset L(B)$ et la trace usuelle sur $L(B)$. Si $\mathbb{X}$ est l'« espace mesuré quantique fini » associé à B, on note également $Aut^+(\mathbb{X})$ ce groupe d'automorphismes quantiques. On a alors $S_N^+ = Aut^+(X_N)$ où X_N est un ensemble de N points « classiques » donné par $B = C(X_N) = \mathbb{C}^N$. On peut également définir le groupe d'automorphismes quantiques $Aut^+(\mathscr{G})$ d'un graphe (classique) fini $\mathscr{G}$. Certains graphes « n'ont pas » d'automorphismes quantiques : c'est pas exemple le cas des cycles orientés C_k, pour lesquels $Aut^+(C_k) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = Aut(C_k)$.

Le groupe quantique S_N^+ est en fait très différent du groupe de permutations S_N dès que $N \geq 4$: en effet c'est alors un groupe quantique compact *infini*, au sens où $\dim A_s(N) = \infty$. Ses règles de fusion sont déterminées dans [Ban99b] dans le cas plus général de $A_{aut}(B)$: ce sont les mêmes que pour $SO(3)$, c'est-à-dire que les représentations irréductibles s_k peuvent être indexées par les entiers $k \in \mathbb{N}$ de manière à avoir $\bar{s}_k \simeq s_k$ et

$$s_k \otimes s_l \simeq s_{|k-l|} \oplus s_{|k-l|+1} \oplus \cdots \oplus s_{k+l}.$$

Finalement, le groupe quantique discret dual de S_N^+ est non moyennable **ssi** $N \geq 5$.

Rappelons maintenant la notion de produit en couronne libre :

Définition 1.1.7 [Bic04, Def. 3.1] *Soit (A, Δ_A) une C^*-algèbre de Woronowicz, et ν_k les plongements canoniques de A dans le produit libre plein A^{*N}. On note $A *_w A_s(N)$ le quotient de $A^{*N} * A_s(N)$ par les relations $\nu_i(a)v_{ik} = v_{ik}\nu_i(a)$, pour tout $a \in A$. Cette C^*-algèbre devient une C^*-algèbre de Woronowicz pour le coproduit Δ défini par $\Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}$, $\Delta(\nu_i(a)) = \sum_k (v_{ik} \otimes 1)(\nu_i \otimes \nu_k)\Delta_A(a)$. Si $A = C(\mathbb{G})$, on note $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ le groupe quantique compact associé à $A *_w A_s(N)$, appelé* produit en couronne libre *de $\mathbb{G}$ par S_N^+.*

Remarquons que si l'abélianisé de A est $C(G)$, alors le groupe compact associé à l'abélianisé de $A *_w A_s(N)$ est le produit en couronne classique $G \wr_N S_N = G^N \rtimes S_N$. La terminologie se justifie également en termes de groupes d'automorphismes de graphes : si $\mathscr{G}$ est un graphe (classique) fini et $G = Aut(\mathscr{G})$ est son groupe d'automorphismes usuel, alors le produit en couronne classique $G \wr_N S_N$ est le groupe d'automorphismes du graphe union disjointe $\bigsqcup_1^N \mathscr{G}$. On montre alors qu'on a, de manière « analogue », $Aut^+(\bigsqcup_1^N \mathscr{G}) = Aut^+(\mathscr{G}) \wr_* S_N^+$ [Bic04, Thm. 4.2].

Nous pouvons maintenant introduire les groupes de réflexions complexes quantiques. Rappelons qu'une isométrie partielle x dans une C^*-algèbre est un élément tel que x^*x et xx^* sont des idempotents. Si de plus $x^s = x^*x$ pour un entier s, alors automatiquement x est normale : $x^*x = xx^*$.

Définition 1.1.8 [BBCC11, Def. 11.3] *On note $A_s^h(N)$ la C^*-algèbre unifère engendrée par des* isométries partielles normales *v_{ij}, les relations qui rendent $v = (v_{ij})_{ij}$ et $\bar{v} = (v_{ij}^*)_{ij}$ unitaires, et les relations $v_{ij}^s = v_{ij}^* v_{ij}$. Elle devient une C^*-algèbre de Woronowicz pour le coproduit Δ défini par $\Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}$. On note H_N^{s+} le groupe quantique compact correspondant.*

Pour $s = 1$ on voit que les v_{ij} sont des projections et on a donc $A_1^h(N) = A_s(N)$. Le cas $s = 2$ avait déjà été considéré dans [BBC07] et le groupe associé est appelé groupe quantique hyperoctaédral. Par ailleurs on donne un sens à la définition pour $s = \infty$ en enlevant simplement dans ce cas la relation $v_{ij}^s = v_{ij}^* v_{ij}$.

Il est facile de voir que l'abélianisé de $A_s^h(N)$ correspond au sous-groupe $H_N^s \subset U_N$ formé par les matrices qui ont exactement une entrée non nulle sur chaque ligne et chaque colonne, et dont chaque entrée non nulle est une racine s^e de l'unité. Ce groupes sont des exemples de *groupes de réflexions complexes*, c'est-à-dire de groupes finis engendrés par des endomorphismes de $\mathbb{C}^N$ qui ont un hyperplan de points fixes. Les groupes de réflexions complexes sont classifiés : il y a 34 cas exceptionnels et une série infinie $G(m, p, N)$, avec m, p, $N \in \mathbb{N}^*$ et p/m [ST54, Coh76]. Avec nos notations, on a $H_N^s = G(s, 1, N)$ — il n'est pas clair s'il existe des analogues quantiques libres des autres groupes de réflexions complexes.

Le résultat suivant donne une définition alternative des algèbres $A_h^s(N)$, et montre que H_N^{s+} est le groupe d'automorphismes quantiques de la réunion disjointe de N copies du cycle orienté C_s :

Proposition 1.1.9 [5, Thm. 3.4] *On a $A_s^h(N) \simeq C(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}) *_w A_s(N)$ en tant que C^*-algèbres de Woronowicz.*

On ne dispose pas de résultat général permettant d'exprimer les règles de fusion de $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ en fonction de celles de $\mathbb{G}$. Dans [5], nous déterminons les règles de fusion de H_N^{s+} sans utiliser la structure de produit en couronne, mais en utilisant une description des espaces de morphismes $\mathrm{Hom}(u^{\otimes k}, u^{\otimes l})$ à l'aide d'un certain type de partitions non croisées, donnée dans [BBCC11]. Plus précisément, on note que la matrice v des générateurs est une coreprésentation de H_N^{s+} par définition du coproduit, et on vérifie que les matrices $v_k = (v_{ij}^k)_{ij}$ sont aussi des coreprésentations pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

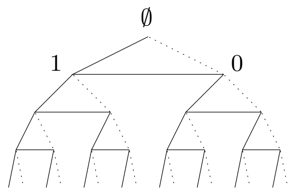
Théorème 1.1.10 [5, Thm. 7.3] *Pour $N \geq 4$ les coreprésentations irréductibles r_x de $A_h^s(N)$ peuvent être indexées par les mots x sur $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ de manière à ce que*

$$r_\emptyset = 1, \quad r_k = v_k \quad \textit{pour } 1 \leq k < s, \quad r_s \oplus r_\emptyset = v_s,$$

et de manière à ce qu'on ait les règles de fusion récursives suivantes, où x, y sont des mots et i, j des lettres :

$$r_{xi} \otimes r_{jy} = \begin{cases} r_{xijy} \oplus r_{x(i+j)y} & \textit{si } i+j \neq 0 \mod s, \\ r_{xijy} \oplus r_{x(i+j)y} \oplus (r_x \otimes r_y) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Nous donnons également dans [5] une formule pour la dimension de la coreprésentation irréductible associée à un mot sur $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. On peut constater que les règles de fusion ci-dessus sont non commutatives pour $s \geq 2$, et que le groupe quantique discret dual de H_N^{s+} est à croissance exponentielle. On représente ci-dessous le graphe de Cayley du dual d'un groupe quantique hyperoctaédral (cas $s = 2$), associé au sous-ensemble $D = \{r_0, r_1\}$. Les arêtes pleines ont pour direction r_1, celles en pointillé ont pour direction r_0, et il y a une boucle de direction r_0 non représentée à chaque sommet différent de l'origine.



1.2 Exemples de graphes quantiques

À la suite de la définition 0.2.9 nous avons noté que l'intérêt des graphes de Cayley *classiques* de groupes *quantiques* discrets était moins évident que dans le cas des groupes discrets usuels, car ces graphes ne sont pas munis d'actions naturelles des groupes quantiques correspondants. Dans cette section, nous introduisons les notions de *graphes de Cayley quantiques* et d'*arbres de Bass-Serre quantiques* qui sont naturellement munis d'actions de groupes quantiques discrets. Pour ce faire, on sera amené à discuter les notions de sous-groupe et d'espace quotient.

1. Pour motiver les définitions et justifier la terminologie, énonçons la définition suivante, inspirée de [Ser77, Chap. 1, §2.1] : un *graphe* (combinatoire) X est donné par un ensemble de sommets $X^{(0)}$, un ensemble d'arêtes orientées $X^{(1)}$, deux applications source et but s, $b : X^{(1)} \to X^{(0)}$ et une application de retournement $\theta : X^{(1)} \to X^{(1)}$ telles que θ est involutive, sans point fixe, et $s \circ \theta = b$. On voit en particulier que les arêtes orientées vont par paires d'orientations opposées, et qu'on peut avoir plusieurs paires d'arêtes entre deux sommets adjacents (arêtes multiples), ainsi que des arêtes ayant même source et but (boucles). On appelle *orientation* de X la donnée d'un sous-ensemble $X_+^{(1)} \subset X^{(1)}$ tel que $X^{(1)} = X_+^{(1)} \sqcup \theta(X_+^{(1)})$.

Si X est connexe, on dispose d'une distance naturelle sur $X^{(0)}$, donnée par le nombre d'arêtes minimal sur les chemins reliant deux sommets donnés. On rappelle que X est un arbre s'il est simplement connexe (au sens simplicial), ce qui exclut notamment les boucles et les arêtes multiples. Dans ce cas, étant donné le choix d'une origine $v_0 \in X^{(0)}$, on peut construire une orientation $X_+^{(1)}$ dite *ascendante* en sélectionnant dans chaque paire d'arêtes $\{e, \theta(e)\}$ celle dont le but est le plus éloigné de v_0. Pour une orientation de ce type, on vérifie notamment que b réalise une bijection entre $X^{(1)}$ et $X^{(0)} \setminus \{v_0\}$.

On peut imaginer plusieurs manières de définir une notion de graphe quantique à partir de la définition précédente. Une idée courante en géométrie non commutative est de remplacer les ensembles X par des C^*-algèbres $A = C(\mathbb{X})$, et les applications par des morphismes (en un sens plus ou moins fort) entre C^*-algèbres. Mais il est parfois plus commode — notamment lorsqu'on pense aux applications en K-théorie — d'encoder une partie de l'information géométrique dans un *opérateur* agissant sur un espace de Hilbert associé aux C^*-algèbres considérées. Rappelons notamment le cadre général de la géométrie non commutative à la Connes : un *triplet spectral* est la donnée $(\mathscr{A}, H, D)$ d'un espace de Hilbert H, d'une sous-algèbre involutive $\mathscr{A} \subset B(H)$, et d'un opérateur D sur H non borné, autoadjoint, à résolvante compacte, tel que les commutateurs $[D, a]$ sont bornés pour tout $a \in \mathscr{A}$ [Con94, Chap. 4, Def. 2.11 and Chap. 6].

Dans ce mémoire, les *graphes quantiques* $\mathbb{X}$ considérés seront donnés par :

- des espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{X}^{(i)})$ et des C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(i)}) \subset B(\ell^2(\mathbb{X}^{(i)}))$, $i = 0, 1$;
- des opérateurs S, $B : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ éventuellement non bornés ;
- un opérateur unitaire $\Theta \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ tel que $S\Theta = B$ et $B\Theta = S$.

De plus les C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(i)})$ considérées seront des sommes directes d'algèbres de matrices, ce qui correspond pour nous au caractère discret des espaces $\mathbb{X}^{(i)}$. Cependant le propos n'est pas de rechercher une axiomatisation de la notion, mais plutôt de construire et d'étudier des exemples intéressants en vue d'applications à des questions de K-théorie et d'algèbres d'opérateurs.

À partir des données précédentes, on peut construire l'espace des *arêtes antisymétriques* $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathrm{Ker}(\Theta + \mathrm{id})$: dans le cas classique cet espace s'identifie, modulo le choix d'une orientation, à l'espace des fonctions ℓ^2 sur l'ensemble des *arêtes géométriques*, c'est-à-dire le quotient de $X^{(1)}$ obtenu en identifiant e et $\theta(e)$ pour tout $e \in X^{(1)}$. La notion d'orientation est plus délicate. Dans le cas classique, à $X_+^{(1)} \subset X^{(1)}$ on peut associer la projection orthogonale $p_+ \in B(\ell^2(X^{(1)}))$ sur le sous-espace correspondant, qui vérifie $\Theta p_+ \Theta^* = \mathrm{id} - p_+$. Dans le cas des arbres de Cayley quantiques, on verra qu'il est nécessaire de considérer deux projecteurs d'orientation, un projecteur « à gauche » $p_{+\star}$ et un projecteur « à droite » $p_{\star+}$ tels que $\Theta p_{+\star} \Theta^* = \mathrm{id} - p_{\star+}$.

2. On commence par présenter les arbres de Bass-Serre quantiques associés à un produit libre de groupes quantiques discrets, dont l'étude est plus facile que celle des graphes de Cayley quantiques. La définition des arbres de Bass-Serre repose de manière essentielle sur la construction de l'espace quotient $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$ associé à un sous-groupe $\mathbb{\Lambda} \subset \mathbb{\Gamma}$. Ces notions sont décrites dans l'article [Vae05] pour le cas général des sous-groupes fermés de groupes quantiques localement compacts. Dans le cas discret la plupart des résultats peuvent être simplifiés et précisés. En ce qui concerne les sous-groupes on a ainsi :

Proposition 1.2.1 [1, Lemma 2.1, Prop. 2.2] *Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret. On a des correspondances naturelles entre :*
- *les sous-C^*-algèbres de Woronowicz $C^*_r(\mathbb{\Lambda}) \subset C^*_r(\mathbb{\Gamma})$,*
- *les sous-catégories pleines* $\operatorname{Corep}\mathbb{\Lambda} \subset \operatorname{Corep}\mathbb{\Gamma}$ *stables par produit tensoriel et dualité,*
- *les quotients de C^*-algèbres $C_0(\mathbb{\Gamma}) \twoheadrightarrow C_0(\mathbb{\Lambda})$ compatibles avec les coproduits.*

De plus les sous-C^*-algèbres de Woronowicz $C^*(\mathbb{\Lambda}) \subset C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ sont automatiquement réduites, et il existe une unique espérance conditionnelle $E : C^*_r(\mathbb{\Gamma}) \to C^*_r(\mathbb{\Lambda})$ compatible avec le coproduit.

L'espace quotient $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$ peut alors être défini au niveau de l'algèbre duale $L^\infty(\mathbb{\Gamma}) = C_b(\mathbb{\Gamma}) = M(C_0(\mathbb{\Gamma}))$ en posant

$$C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \{a \in C_b(\mathbb{\Gamma}) \mid (\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta(a) = a\otimes 1\}.$$

Cette C^*-algèbre est munie, par restriction du coproduit, d'une coaction $\delta : C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \to C_b(\mathbb{\Gamma})\otimes C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, qui correspond à une action à gauche de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$. On aura besoin de plus d'une représentation naturelle de $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ sur un espace $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, et de sous-$*$-algèbres $C_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \subset C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) \subset C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

Pour l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ on part du fait que $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ est donné par la construction GNS associée à l'état de Haar de $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$, et on définit $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ comme l'espace GNS associé à la forme linéaire positive $\epsilon_{\mathbb{\Lambda}} \circ E : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}$. Dans le cas où $\mathbb{\Lambda}$ est moyennable, cette forme linéaire s'étend à $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$, mais dans le cas général on doit se restreindre à la sous-$*$-algèbre dense $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$. Comme l'état de Haar est fidèle sur $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, on dispose par définition d'un opérateur densément défini $T : \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \to \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, qui correspond à la sommation le long des classes modulo $\mathbb{\Lambda}$ et est borné **ssi** $\mathbb{\Lambda}$ est fini. Plus généralement si $\mathbb{\Lambda}_1 \subset \mathbb{\Lambda}_2 \subset \mathbb{\Gamma}$ sont des sous-groupes, on dispose de $T : \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}_1) \to \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}_2)$. On a alors

Proposition 1.2.2 [8, Lemma 3.7] *La restriction à $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ de la représentation naturelle de $C_b(\mathbb{\Gamma})$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ se factorise « à travers T » en une $*$-représentation de $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$: on a ainsi $aT\xi = Ta\xi$ pour $a \in C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$, $\xi \in \operatorname{Dom} T$. De plus, cette représentation est fidèle.*

Comme pour l'algèbre $C_b(\mathbb{\Gamma})$, on peut étudier la structure de $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ à l'aide de la catégorie $\operatorname{Corep}\mathbb{\Gamma}$. On peut notamment définir une relation d'équivalence sur $\operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}$ en posant $r \sim s$ **ssi** il existe $t \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Lambda}$ tel que $r \subset s\otimes t$, et on note $\operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$ l'espace quotient (qui n'est pas l'ensemble des objets irréductibles d'une catégorie). Rappelons qu'on note p_r, $r \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}$, les projections centrales minimales de $C_0(\mathbb{\Gamma})$. On pose alors $p_\alpha = \sum\{p_r \mid r \in \alpha\}$ pour $\alpha \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}$, et on vérifie que p_α appartient à $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ et que $p_\alpha C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ est de dimension finie. On obtient ainsi une décomposition de $C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ en C^*-algèbres de dimension finie et on note $C_0(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ (resp. $C_c(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$) la somme directe C^*-algébrique (resp. algébrique) des sous-algèbres $p_\alpha C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$.

QUESTION 1.2.3 Dans tous les cas que nous avons étudiés, les sous-algèbres $p_\alpha C_b(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ sont des algèbres de matrices. Est-ce le cas en général ? □

On sait en particulier que la réponse à la question précédente est positive dans le cas simple suivant :

Définition 1.2.4 [8, Def. 4.1, Lemma 4.2] *Soit $\mathbb{F}$ un groupe quantique discret. On dit que le sous-groupe $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$ est* divisible *s'il l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe un $*$-isomorphisme $C_0(\mathbb{F}) \simeq C_0(\mathbb{F}/\mathbb{A}) \otimes C_0(\mathbb{A})$, compatible avec les coactions de $C_0(\mathbb{A})$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \operatorname{Irr} \mathbb{F}/\mathbb{A}$ il existe $r \in \alpha$ tel que $r \otimes t$ est irréductible pour tout $t \in \operatorname{Irr} \mathbb{A}$.*

D'un point de vue heuristique la propriété de divisibilité correspond à l'existence d'une section « continue » $\mathbb{F}/\mathbb{A} \to \mathbb{F}$. Dans le cas des groupes discrets usuels, tous les sous-groupes sont divisibles, mais ce n'est pas le cas en général pour les groupes quantiques discrets. Donnons deux classes d'exemples quantiques qui seront utiles par la suite. On note d'abord que $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_1$ sont des sous-groupes dans le produit libre $\mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$. En utilisant la description de $\operatorname{Irr} \mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$ en fonction de $\operatorname{Irr} \mathbb{F}_0$ et $\operatorname{Irr} \mathbb{F}_1$ donnée dans [Wan95, Thm. 3.10], il est facile de vérifier que ce sont des sous-groupes divisibles. Par ailleurs, il est facile de voir qu'on a un morphisme de C^*-algèbres de Woronowicz $\Phi : C^*(\mathbb{F}U(Q)) \to C^*(\mathbb{F}O(Q)) * C^*(\mathbb{Z}) = C^*(\mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z})$ défini sur les générateurs par la formule $\Phi(u_{ij}) = v_{ij} z$. Banica montre que lorsque $Q\bar{Q} = \pm I_N$ ce morphisme se factorise en un plongement $\Phi_r : C_r^*(\mathbb{F}U(Q)) \hookrightarrow C_r^*(\mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z})$ [Ban97, Thm. 1 (iv)] : en particulier $\mathbb{F}U(Q)$ apparaît ainsi comme un sous-groupe de $\mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z}$. On a alors

Proposition 1.2.5 [8, Prop. 4.3] *Soit $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ telle que $Q\bar{Q} = \pm I_N$. Alors le sous-groupe $\mathbb{F}U(Q) \subset \mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z}$ est divisible.*

On peut maintenant introduire la notion d'arbre de Bass-Serre pour un produit libre de groupes quantiques discrets. On rappelle que si $\Gamma = \Gamma_0 *_\Lambda \Gamma_1$ est un produit libre amalgamé de groupes discrets usuels, l'arbre de Bass-Serre X associé est défini par $X^{(0)} = \Gamma/\Gamma_0 \sqcup \Gamma/\Gamma_1$ et $X^{(1)} = \Gamma/\Lambda \times \{0, 1\}$, avec les applications

$$\theta(g\Lambda, \epsilon) = (g\Lambda, 1 - \epsilon), \quad s(g\Lambda, \epsilon) = g\Gamma_\epsilon \quad \text{et} \quad b(g\Lambda, \epsilon) = g\Gamma_{1-\epsilon}.$$

Dans le cas quantique on pose alors :

Définition 1.2.6 [1, Def. 3.2] [8, Sec. 5] *Soit $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_1$ des groupes quantiques discrets, $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}_i$ un sous-groupe commun et $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 *_\mathbb{A} \mathbb{F}_1$ leur produit libre amalgamé. On note (e_0, e_1) la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et $T_i : \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{A}) \to \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{F}_i)$ les opérateurs canoniques. L'*arbre de Bass-Serre quantique $\mathbb{X}$ *associé au produit libre est donné par :*

1. *les C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(0)}) = C_0(\mathbb{F}/\mathbb{F}_0) \oplus C_0(\mathbb{F}/\mathbb{F}_1)$, $C_0(\mathbb{X}^{(1)}) = C_0(\mathbb{F}/\mathbb{A}) \otimes \mathbb{C}^2$ représentées fidèlement sur les espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{F}_0) \oplus \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{F}_1)$, $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{A}) \otimes \mathbb{C}^2$;*
2. *les opérateurs densément définis S, $B : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et l'opérateur unitaire $\Theta \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ définis par*

$$S(\xi \otimes e_\epsilon) = T_\epsilon \xi, \quad B(\xi \otimes e_\epsilon) = T_{1-\epsilon} \xi, \quad \Theta = \mathrm{id} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les opérateurs S, B sont bornés **ssi** $\mathbb{F}_0/\mathbb{A}$, $\mathbb{F}_1/\mathbb{A}$ sont finis : on dit alors que le graphe quantique $\mathbb{X}$ est localement fini. Par ailleurs, on note que le graphe quantique $\mathbb{X}$ est naturellement muni d'une action du groupe quantique discret $\mathbb{F}$. Plus précisément, les espaces $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ étant des espaces GNS associés à $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, ils sont naturellement munis de $*$-représentations de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ qui s'étendent à la C^*-algèbre universelle $C^*(\mathbb{\Gamma})$, et on a $xS\xi = Sx\xi$, $xB\xi = Bx\xi$ pour $x \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ et $\xi \in \operatorname{Dom} S = \operatorname{Dom} B$. De plus on vérifie que ces actions sur les espaces ℓ^2 induisent les coactions naturelles de $C_0(\mathbb{\Gamma})$ sur $C_0(\mathbb{X}^{(0)})$ et $C_0(\mathbb{X}^{(1)})$. Enfin, il est clair que Θ commute à l'action de $C^*(\mathbb{\Gamma})$. Le sous-espace des arêtes antisymétriques $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ est donc également muni d'une représentation de $C^*(\mathbb{\Gamma})$ par restriction, ainsi que le sous-espace $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})\otimes e_0 \subset \ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ qui définit une orientation invariante du graphe quantique.

On peut construire une autre orientation de $\mathbb{X}$ qui est l'analogue de l'orientation ascendante d'un arbre de Bass-Serre classique associée au choix de l'origine $1 \in \Gamma/\Gamma_0 \subset X^{(0)}$. Pour ce faire on utilise la structure des produits libres de C^*-algèbres et des constructions GNS associées, cf par exemple [Voi85, Sec. 1]. On dispose en particulier de sous-espaces naturels $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})^\circ_{r,i} \subset \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ correspondant aux vecteurs « qui ne finissent pas dans $\mathbb{\Gamma}_i$ ». Notons ξ_0 (resp. ξ_0^i) le vecteur cyclique de $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ (resp. $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i)$) correspondant à l'unité de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$. On a alors $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda}) = \mathbb{C}\xi_0 \oplus \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})^\circ_{r,0} \oplus \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})^\circ_{r,1}$, et on définit un projecteur orthogonal $p^0_+ \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ en posant

$$p^0_+\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathbb{C}(\xi_0\otimes e_0) \ \oplus\ \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})^\circ_{r,1}\otimes e_0 \ \oplus\ \ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})^\circ_{r,0}\otimes e_1.$$

Il est clair qu'on a $\Theta^* p^0_+ \Theta = \mathrm{id} - p^0_+$, et il est facile de vérifier que l'opérateur B induit un isomorphisme entre $p^0_+\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ et l'orthogonal dans $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ du « vecteur origine » ξ^0_0. En remplaçant $\xi_0\otimes e_0$ par $\xi_0\otimes e_1$ dans la formule précédente on obtient de même un projecteur d'orientation p^1_+ correspondant au choix du vecteur origine ξ^1_0. Ces orientations ne sont pas invariantes, cependant on verra à la section 2.1.1 que les projecteurs p^i_+ commutent à l'action de $C^*(\mathbb{\Gamma})$ modulo les opérateurs compacts.

3. On décrit maintenant la construction des graphes de Cayley quantiques. Rappelons que $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ est l'espace GNS associé à l'état de Haar de $C^*(\mathbb{\Gamma})$, et que la sous-$*$-algèbre dense $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ est une algèbre de Hopf pour la restriction du coproduit Δ. On note $S : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ son antipode, $\epsilon : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}$ sa co-unité, et $\Lambda : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \ell^2(\mathbb{\Gamma})$ l'application GNS. Rappelons également qu'à tout élément $r \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}$ est associée une projection centrale minimale $p_r \in C_0(\mathbb{\Gamma})$, et que $C_0(\mathbb{\Gamma})$ est fidèlement représentée sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$.

Définition 1.2.7 [2, Def. 3.1] *Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret et $D \subset \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}$ un sous-ensemble stable par dualité et ne contenant pas la corepresentation triviale. On note $p_1 = \sum\{p_s \mid s \in D\} \in C_b(\mathbb{\Gamma}) \subset B(\ell^2(\mathbb{\Gamma}))$. Le* graphe de Cayley quantique *associé à $(\mathbb{\Gamma}, D)$ est donné par :*

1. *les C^*-algèbres $C_0(\mathbb{X}^{(0)}) = C_0(\mathbb{\Gamma})$, $C_0(\mathbb{X}^{(1)}) = C_0(\mathbb{\Gamma})\otimes p_1 C_0(\mathbb{\Gamma})$ représentées fidèlement sur les espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma})$, $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma})\otimes p_1\ell^2(\mathbb{\Gamma})$;*
2. *les opérateurs densément définis S, $B : \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et l'opérateur unitaire $\Theta \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ définis par*

$$S(\Lambda(x)\otimes\Lambda(y)) = \Lambda(x)\epsilon(y), \quad B(\Lambda(x)\otimes\Lambda(y)) = \Lambda(xy),$$
$$\Theta(\Lambda(x)\otimes\Lambda(y)) = (\Lambda\otimes\Lambda)(\mathrm{id}\otimes S)((x\otimes 1)\Delta(y)).$$

Des calculs élémentaires dans l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ montrent qu'on a bien $B\Theta = S$ et $S\Theta = B$, et on voit que Θ est unitaire en vérifiant la formule $\Theta = \tilde{V}(1\otimes U)$ [2, Lemma 3.5, Prop. 3.6], où interviennent les unitaires fondamentaux du système de Kac $(\ell^2(\mathbb{\Gamma}), V, U)$ associé à $\mathbb{\Gamma}$ au sens de [BS93]. Notons que B et S sont bornés **ssi** D est fini, ce qui correspond au cas localement fini. Enfin, le graphe quantique $\mathbb{X}$ est naturellement muni d'une action de $\mathbb{F}$: en effet $C^*(\mathbb{F})$ agit, par définition, sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et sur le premier facteur de $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, et les opérateurs B, S, Θ sont évidemment des entrelaceurs.

Par ailleurs on montre, en supposant que D engendre $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$, que Θ est involutif **ssi** $\mathbb{F}$ est un groupe discret usuel. On a donc $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$ en général, ce qui distingue fortement les graphes de Cayley quantiques des graphes classiques, mais également des arbres de Bass-Serre quantiques. Cette non-involutivité a de nombreuses conséquences pour l'étude des graphes de Cayley quantiques, notamment en ce qui concerne le sous-espace propre $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$, ainsi que la notion d'orientation. Il est parfois utile de considérer le sous-espace maximal $Q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, dit *quasi-classique*, sur lequel Θ est involutif, cf [7, Lem. 3.3], et la projection orthogonale associée Q_0. Notons cependant ce sous-espace n'est pas stable par l'action de $\mathbb{F}$.

On a par ailleurs des sous-espaces dits *classiques* $q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$, $q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \subset Q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ définis comme sous-espaces de points fixes pour l'action adjointe du dual $\hat{\mathbb{F}}$, et qui définissent un sous-graphe de $\mathbb{X}$ au sens où $[q_0, \Theta] = 0$ et $q_0 B = B q_0$. Ce sous-graphe classique peut être entièrement décrit à l'aide du graphe de Cayley classique X *avec arêtes multiples*, discuté à la section 0.2.3 : plus précisément, on peut construire des bases orthonormées $(\zeta_r)_r$ de $q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ et $(\xi_\alpha)_\alpha$ de $q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, indexées par les éléments $r \in X^{(0)}$ et $\alpha \in X^{(1)}$, de manière à ce que

$$\Theta(\xi_\alpha) = \xi_{\theta\alpha} \quad \text{et} \quad B(\xi_\alpha) = \left(\frac{\operatorname{qdim} s(\alpha)\otimes d(\alpha)}{\operatorname{qdim} b(\alpha)}\right)^{1/2} \zeta_{b(\alpha)}, \tag{1}$$

où θ, s, b sont les applications retournement, source et but de X, et où $d(\alpha) \in D$ est la direction de α. Notons que $b(\alpha) \subset s(\alpha)\otimes d(\alpha)$ par définition de X. Au facteur numérique près, le sous-graphe classique du graphe de Cayley quantique est donc la version hilbertienne du graphe de Cayley classique.

Pour introduire dans ce cadre un analogue quantique de l'orientation ascendante dans un arbre classique, on se place dans le cas où le graphe de Cayley classique associé à $(\mathbb{F}, D)$ est un arbre, et utilise la graduation de $C_0(\mathbb{F})$ donnée par la distance à l'origine dans ce graphe classique. Plus précisément, on considère les projecteurs $p_n = \sum\{p_r \mid r \in \operatorname{Irr}\mathbb{F}, d(r,1) = n\}$. Dans le cas classique, ces projecteurs sont les fonctions caractéristiques des sphères centrées à l'origine dans l'ensemble des sommets du graphe de Cayley.

On introduit alors le projecteur ascendant « à droite » $p_{\star+} \in B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$ en utilisant le coproduit dual $\hat{\Delta} : C_0(\mathbb{F}) \to C_b(\Gamma \times \Gamma) \subset B(\ell^2\Gamma\otimes\ell^2\Gamma)$:

$$p_{\star+} = \textstyle\sum_n (p_n \otimes p_1)\hat{\Delta}(p_{n+1}).$$

Cette définition est conçue de manière à ce que $p_{\star+}$ soit un élément de $M(C_0(\mathbb{X}^{(1)}))$ et vérifie $B p_{\star+} S^{-1}(p_n \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})) \subset p_{n+1}\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ — autrement dit, parmis les « arêtes » ayant leur origine sur la sphère de rayon n, celles dans l'image de $p_{\star+}$ ont leur but sur la sphère de rayon $n+1$.

De plus, l'algèbre $C_0(\mathbb{X}^{(1)})$ a en fait deux représentations naturelles « droite » et « gauche » sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, qui ne coïncident que lorsque $\mathbb{F}$ est un groupe discret usuel — en effet, c'est déjà le cas pour les actions de $C_0(\mathbb{F})$ sur $\ell^2(\mathbb{F})$. On a en particulier une version « à gauche » de $p_{\star+}$, notée $p_{+\star}$, qui commute à $p_{\star+}$. On pose de plus $p_{\star-} = \mathrm{id} - p_{\star+}$, $p_{-\star} = \mathrm{id} - p_{+\star}$ et

$$p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}, \quad p_{+-} = p_{+\star}p_{\star-}, \quad p_{-+} = p_{-\star}p_{\star+}, \quad p_{--} = p_{-\star}p_{\star-}.$$

Rappelons que, dans le cas d'un arbre, les buts des arêtes ascendantes correspondent bijectivement aux sommets différents de l'origine. On s'attend à ce que les graphes de Cayley quantiques des groupes quantiques libres vérifient des propriétés analogues à celles des arbres classiques, et on obtient effectivement :

Proposition 1.2.8 [2, Prop. 4.7] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble D des générateurs canoniques de* $\mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$*. On note $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})^\circ = \xi_0^\perp$ l'orthogonal du vecteur cyclique canonique. Alors la restriction de l'opérateur but B est inversible de $p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ vers $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})^\circ$.*

Le deuxième volet de l'étude concerne l'espace des arêtes antisymétriques $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ et ses relations avec l'orientation ascendante. Dans le cas d'un arbre classique, comme dans celle des arbres de Bass-Serre quantique, il est évident que le projecteur ascendant p_+ réalise un isomorphisme (à un scalaire près) entre $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ et $p_+\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Dans le cas des graphes de Cayley quantiques de groupes quantiques libres, la situation est plus compliquée. On commence par étudier les relations algébriques entre les projecteurs d'orientation et la structure de graphe. Dans le cas des groupes quantiques libres, on obtient en particulier un résultat d'involutivité partielle pour l'opérateur de retournement Θ :

Lemme 1.2.9 [2, Prop. 4.3, Prop. 5.1] *On suppose que le graphe de Cayley classique associé à $(\mathbb{\Gamma}, D)$ est un arbre. Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé. On note $p_{\star+}$, $p_{+\star}$ les projecteurs ascendants introduits ci-dessus. On a alors $\Theta p_{+\star} = p_{\star-}\Theta$ et $Bp_{+-} = Bp_{-+} = 0$.*

Si de plus $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}$ est un groupe quantique libre, et D est l'ensemble des coreprésentations fondamentales de $\mathbb{F}$, on a $(p_{++} + p_{--})\Theta^n(p_{++} + p_{--}) = (p_{++} + p_{--})\Theta^{-n}(p_{++} + p_{--})$ pour tout n.

On peut alors décrire l'espace $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ de la manière suivante :

Théorème 1.2.10 [2, Thm. 5.3] et [7, Thm. 3.5] *On considère les projecteurs ascendants $p_{+\star}$, $p_{\star+}$ et l'espace des arêtes antisymétriques $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ du graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$. Alors*

1. *La restriction de p_{++} à $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ est injective et*

$$p_{++}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = \{\zeta \in p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \mid \exists \eta \in p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \quad (\mathrm{id} + p_{+-}\Theta)(\eta) = p_{+-}\Theta\zeta\}.$$

2. *L'ensemble des vecteurs η qui apparaissent au point précédent est $p_{+-}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ et on a, si la dimension quantique des éléments de D est différente de 2 :*

$$p_{+-}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = p_{+-}\Theta p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}).$$

La preuve du premier point est entièrement algébrique et repose sur les « règles de calcul » du Lemme 1.2.9. En revanche, le deuxième point est de nature analytique : on doit notamment réaliser l'analyse spectrale de l'opérateur $p_{+-}\Theta p_{++}$, que l'on ramène à des calculs dans la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}$. Les résultats dont on a besoin dans $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}$ sont du type de celui présenté au Lemme 0.2.7. Notons que l'hypothèse sur la dimension quantique des éléments de D revient à exclure les cas où l'un des facteurs de $\mathbb{F}$ est isomorphe à $\mathbb{F}U_2$ ou au dual de $SU_{\pm1}(2)$. Lorsque tous les éléments de D sont de dimension 1, $\mathbb{F}$ est un groupe libre F_n usuel, p_{+-} est nul et $p_{++}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Dans les autres cas, le théorème montre que $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ est « trop petit », et il relie ce défaut aux opérateurs $p_{+-}\Theta p_{++}$, $p_{+-}\Theta p_{+-}$. Ce « défaut » peut être compris plus en détail : nous reviendrons sur ce point à la fin de la section suivante.

1.3 Marches aléatoires et frontières

Dans cette section nous rappelons la notion de *marche aléatoire* sur un groupe quantique discret. Dans le cas des groupes quantiques libres orthogonaux $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$, nous construisons la *frontière de Gromov* qui fournit un modèle géométrique pour la frontière de Poisson des marches aléatoires irréductibles sur $\mathbb{\Gamma}$. Nous étudions l'action de $\mathbb{\Gamma}$ sur cette frontière et notons le parallèle avec l'espace des arêtes à l'infini du graphe de Cayley.

1. Soit $L^\infty(\Omega)$ une algèbre de von Neumann munie d'un état normal ω, et $L^\infty(\mathbb{X})$ une autre algèbre de von Neumann. Une *variable aléatoire quantique* sur l'univers Ω, à valeurs dans $\mathbb{X}$, est un $*$-homomorphisme normal $X : L^\infty(\mathbb{X}) \to L^\infty(\Omega)$. La loi de X est l'état $\omega \circ X$ induit par X sur $L^\infty(\mathbb{X})$. Via le calcul fonctionnel borélien, une variable aléatoire réelle correspond à un opérateur autoadjoint $\underline{X}$ affilié à $L^\infty(\Omega)$, et la loi de X est l'image de la mesure spectrale de $\underline{X}$ par ω. Les éléments de $L^\infty(\Omega)$ correspondent aux variables aléatoires réelles bornées. Un processus stochastique quantique (à temps discret) est une suite de variables aléatoires $X_n : L^\infty(\mathbb{X}) \to L^\infty(\Omega)$.

Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret. On se donne une suite d'états normaux $(\omega_n)_{n\geq 0}$ sur $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$, et on construit le produit tensoriel infini $L^\infty(\Omega) = L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \otimes \bigotimes_{n>0}(L^\infty(\mathbb{\Gamma}), \omega_n)$, qui est muni de l'état $\omega = \bigotimes_{n\geq 0} \omega_n$. Au coproduit $\hat\Delta : L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \otimes L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ on associe des $*$-homomorphismes $\hat\Delta^n : L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to L^\infty(\mathbb{\Gamma})^{\otimes n+1}$ en posant $\hat\Delta^0 = \mathrm{id}$ et $\hat\Delta^{n+1} = (\hat\Delta^n \otimes \mathrm{id})\hat\Delta$. On considère alors le processus stochastique $(X_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{\Gamma}$ obtenu en posant $X_n(x) = \hat\Delta^n(x) \otimes 1 \otimes \cdots$, appelé *marche aléatoire* sur $\mathbb{\Gamma}$ avec incréments de lois ω_n. Il est facile de vérifier que c'est un processus markovien quantique au sens de [AFL82], avec loi initiale ω_0 et opérateurs de transition $P_n = (\mathrm{id} \otimes \omega_n)\hat\Delta : L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to L^\infty(\mathbb{\Gamma})$. Plus précisément, notant $E_n : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\mathbb{\Gamma})^{\otimes n+1}$ l'espérance conditionnelle canonique sur les $n+1$ premiers facteurs, on a $E_n \circ X_{n+1} = X_n \circ P_{n+1}$.

On s'intéressera en particulier au cas de la marche aléatoire donnée par $\omega_n = q\text{-tr}_v$ pour tout n, où $q\text{-tr}_v$ est la « trace quantique normalisée » sur le bloc $L(H_v)$ de $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ correspondant à une coreprésentation irréductible $v \in \operatorname{Irr} \mathbb{\Gamma}$. Plus précisément, $q\text{-tr}_v$ s'obtient en restreignant le poids de Haar à gauche $\hat h_L$ au bloc $L(H_v)$, puis en normalisant. On dit que $(X_n)_n$ est la marche aléatoire sur $\mathbb{\Gamma}$ engendrée par v. Notons que ω_n est combinaison linéaire d'états $q\text{-tr}_v$ **ssi** l'opérateur P_n conserve le centre de $L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ [NT04, Prop. 2.1] : on dit alors que ω_n est *central*.

Par dualité, un état normal $\omega_n \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})_*$ induit un élément $y_n = (\omega_n \otimes \mathrm{id})(V_{\mathbb{\Gamma}}) \in \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$. Par exemple si $\omega_n = q\text{-tr}_v$ on a $y_n = \lambda(\tilde\chi_v)/\operatorname{qdim}(v)$, où $\tilde\chi_v$ est le caractère tordu de v, qui est égal au charactère $\chi_v = (\operatorname{Tr} \otimes \mathrm{id})(v)$ dans le cas unimodulaire. De cette manière, la loi de X_n dans la marche aléatoire correspond à l'élément $x_n = y_1 \cdots y_n \in \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$. De la même manière, à une forme linéaire normale φ sur $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ on associe un élément $a = (\mathrm{id} \otimes \varphi)(V_{\mathbb{\Gamma}}) \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})$, dont l'espérance au temps n est donnée par $\omega(X_n(a)) = \varphi(y_1 \cdots y_n)$. En particulier si les incréments sont constants, $y_1 = y_2 = \cdots = y$, cette espérance correspond au n^{e} moment de y relativement à φ.

Dans le cas classique $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ on retrouve bien sûr la notion de marche aléatoire sur un groupe. Biane a étudié le cas des duaux de groupes de Lie compacts $\mathbb{\Gamma} = \hat G$ [Bia91, Bia92] : il s'intéresse notamment aux deux marches aléatoires classiques qui s'obtiennent en restreignant le processus quantique $(X_n)_n$ d'incrément constant $\mu \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})_*$ aux sous-algèbres commutatives $\ell^\infty(\operatorname{Irr} G) = Z(\mathscr{L}G) \subset \mathscr{L}(G) = L^\infty(\mathbb{\Gamma})$ et $\ell^\infty(X) = \mathscr{L}(T) \subset \mathscr{L}(G) = L^\infty(\mathbb{\Gamma})$, où X est le réseau des poids et $T \subset G$ est un tore maximal. Il montre en particulier que ces deux marches aléatoires classiques sont reliées par un conditionnement de Doob. Ces résultats ont été généralisés au cas des duaux des groupes quantiques $SU_q(N)$ par Collins [Col04].

Au niveau dual, notant $y = (\mu \otimes \mathrm{id})(V_{\mathbb{\Gamma}})$, l'étude de ces deux marches aléatoires classiques correspond à celle des moments de y relativement à deux types d'états sur $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = L^\infty(G)$: les mesures invariantes par l'action adjointe d'une part, et les mesures supportées sur un tore maximal d'autre part. À un niveau élémentaire, les deux types de marches sont alors reliées par la *formule d'intégration de Weyl* [Bou82, §6, Thm. 1]. Dans [BV09, section 5] nous utilisons ce point de vue pour étudier la probabilité ρ_n de retour à l'origine en $2n$ pas dans la marche aléatoire sur le dual d'un groupe de Lie compact G, connexe et simplement connexe, engendrée par les poids fondamentaux. Cette probabilité correspond à l'espérance de la fonction centrale $p_0 \in \ell^\infty(\operatorname{Irr} G)$, et nous l'estimons en passant à la marche aléatoire sur le réseau des poids X : on obtient $p_{2n} \approx n^{-d/2}$, où d est la dimension réelle de G.

Dans le cadre des marches aléatoires sur des groupes usuels, on s'intéresse aux notions de frontière de Poisson et de frontière de Martin. La première notion a été généralisée au cas quantique par Izumi [Izu02]. On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{\Gamma}$ avec loi initiale ω_0 donnée par la co-unité $\hat\epsilon : L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$, et incrément constant de loi μ. On note $P = (\mathrm{id}\otimes\mu)\hat\Delta$ l'opérateur de transition. On appelle *support* de μ la somme directe $v = \operatorname{Supp}\mu$ des corepresentations irréductibles $r \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}$ telles que $\mu(p_r) \neq 0$. Dans la suite, on suppose que μ est central et que $\operatorname{Supp}\mu$ est de dimension finie, auto-adjoint, et engendre $\operatorname{Corep}\mathbb{\Gamma}$.

Rappelons qu'un élément $x \in L^\infty(\Omega)$ est déterminé par la suite de ses espérances conditionnelles $E_n(x)$. On introduit la *frontière de Poisson* $\partial_P\mathbb{\Gamma}$ à l'aide de la sous-algèbre $L^\infty(\partial_P\mathbb{\Gamma}) \subset L^\infty(\Omega)$ formée des éléments x tels que $E_n(x) \in \operatorname{Im} X_n$ pour tout n — dans le cas classique les éléments de $L^\infty(\partial_P\Gamma)$ sont les fonctions mesurables par rapport à la tribu asymptotique relative au décalage temporel. Il est plus standard d'introduire $\partial_P\Gamma$ à partir de la tribu invariante, mais on sait que les deux tribus sont égales à des ensembles négligeables près [Der86, App. 2].

Notons que l'algèbre de von Neumann $L^\infty(\Omega)$ peut être vue comme sous-algèbre du facteur ITPFI $N = \bigotimes_n (L(H_v), q\text{-}\mathrm{tr}_v)$. Izumi note alors que $L^\infty(\partial_P\mathbb{\Gamma})$ est égal au commutant de l'algèbre des points fixes $N^\alpha \subset N$, où α est la *coaction adjointe* de $\mathbb{\Gamma}$ sur N. Dans certaines situations, par exemple lorsque les règles de fusion de $\mathbb{\Gamma}$ sont commutatives [Hay00, Crl. 3.5], N^α est en fait un sous-facteur de N.

Par ailleurs, on considère le sous-espace $H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu) = \{y \in L^\infty(\mathbb{\Gamma}) \mid P(y) = y\}$ des *fonctions harmoniques bornées*. On peut le munir d'un produit d'algèbre de von Neumann en posant $y \cdot z = s^* \lim_{n\to\infty} P^n(yz)$. Pour $x \in L^\infty(\partial_P\mathbb{\Gamma})$, Izumi montre que la *suite temporelle harmonique* $(y_n)_n \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})^{\mathbb{N}}$, définie par les relations $E_n(x) = X_n(y_n)$, provient par restriction d'une fonction harmonique $y \in H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu)$, et qu'on obtient ainsi un isomorphisme $\rho : H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu) \to L^\infty(\partial_P\mathbb{\Gamma})$ [Izu02, Thm. 3.6]. De plus ρ entrelace les actions naturelles de $\mathbb{\Gamma}$ et on a la *formule intégrale* $\omega \circ \rho(y) = \hat\epsilon(y)$ pour $y \in H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu)$. Remarquons que sous les hypothèses faites ci-dessus, $H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu)$ ne dépend pas de μ si les règles de fusions de $\mathbb{\Gamma}$ sont commutatives [INT06, Prop. 1.1].

Dans le cas classique $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$, la trivialité de $\partial_P\Gamma$ est un sujet d'étude classique sous l'appellation de « propriété de Liouville ». Dans le cas $\mathbb{\Gamma} = \hat G$, où G est un groupe de Lie compact, [Was88, p212] implique que $L^\infty(\partial_P\mathbb{\Gamma})$, vu comme commutant du sous-facteur $N^\alpha \subset N$, est trivial. Ce n'est plus le cas pour les duaux des q-déformations G_q : plus généralement si $\mathbb{\Gamma}$ n'est pas unimodulaire $\partial_P\mathbb{\Gamma}$ n'est pas trivial [Izu02, Crl. 3.9]. Lorsque la frontière de Poisson n'est pas triviale se pose le problème de son *identification* : on cherche un $\mathbb{\Gamma}$-espace mesuré $(\mathbb{X},\nu)$ « naturel » et un isomorphisme équivariant $\rho : H^\infty(\mathbb{\Gamma},\mu) \to L^\infty(\mathbb{X})$ tel que $\nu \circ \rho = \hat\epsilon$. Dans [Izu02, Thm. 5.9], Izumi résoud le problème pour le dual de $SU_q(2)$ en prenant pour $\mathbb{X}$ la sphère de Podleś $SU_q(2)/T$. Ce résultat est généralisé dans [INT06] au cas de $SU_q(N)$, puis dans [Tom07] au cas des q-déformations G_q — plus généralement, si $\mathbb{\Gamma}$ est moyennable et si ses règles de fusion sont commutatives, la frontière de Poisson $\partial_P\mathbb{\Gamma}$ est isomorphe, en tant qu'espace mesuré quantique, au quotient du dual $\mathbb{G} = \hat{\mathbb{\Gamma}}$ par le sous-groupe maximal de type Kac $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ [Tom07, Thm. 4.8].

Dans le cas classique, une réalisation *topologique* de la frontière de Poisson des marches aléatoires transientes est fournie par la compactification de Martin, et plus précisément par la *frontière minimale* correspondante. La construction de la frontière de Martin est étendue au cas quantique par Neshveyev et Tuset [NT04] qui démontrent un résultat de représentation intégrale des fonctions harmoniques positives. Dans le cas du dual de $SU_q(2)$, $q \in]0,1[$, ils montrent que la frontière de Martin est homéomorphe à la sphère de Podleś $SU_q(2)/T$, et que la représentation intégrale des fonctions harmoniques induit un isomorphisme entre la frontière de Martin, munie de l'unique mesure représentant $1 \in L^\infty(\mathbb{\Gamma})$, et la frontière de Poisson. Cependant on n'a pas à l'heure actuelle de résultat général reliant la frontière de Martin à la frontière de Poisson dans le cas quantique.

2. Dans le cas des groupes libres usuels F_N, une réalisation *géométrique* de la frontière de Poisson (et de la frontière de Martin) est fournie par la *frontière de Gromov*. Plus précisément, si S_k est la sphère centrée à l'origine et de rayon k dans le graphe de Cayley de F_N, on peut considérer la limite projective $\partial F_N = \varprojlim S_k$ relativement aux applications $S_{k+1} \to S_k$ données par le déplacement d'un pas vers l'origine. C'est un espace compact totalement discontinu pour la topologie initale associée au système projectif, qui est naturellement muni d'une mesure de probabilité ν induite par les mesures de probabilité uniformes sur les sphères S_k, ainsi que d'une action de F_N par homéomorphismes. On montre alors que $(\partial F_N, \nu)$ s'identifie à la frontière de poisson $\partial_P F_N$ de la marche aléatoire « au plus proche voisin », c'est-à-dire d'incrément μ uniforme parmi les générateurs et leurs inverses. Plus précisément, on a un isomorphisme équivariant $\rho : L^\infty(\partial F_N) \to H^\infty(F_N, \mu)$ donné par

$$\rho(f) = (g \mapsto \textstyle\int f(g \cdot x) \mathrm{d}\nu(x)).$$

Cette identification de la frontière de Poisson de F_N à l'aide de la frontière de Gromov a lieu pour des classes plus générales d'incréments μ, par exemple pour μ à support fini.

Dans [4], nous construisons un analogue de la frontière de Gromov pour les groupes quantiques libres orthogonaux $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$. L'analogue des sphères de rayon k dans F_N est fourni par les sous-algèbres $p_k C_b(\mathbb{\Gamma})$, où p_k est la projection centrale associée à la coreprésentation irréductible r_k de $\mathbb{\Gamma}$. On forme un système inductif en utilisant l'inclusion $r_{k+1} \subset r_k \otimes r_1$ donnée par les règles de fusion de $\mathbb{F}O(Q)$: plus précisément, si $v : H_{k+1} \to H_k \otimes H_1$ est un morphisme d'entrelacement *isométrique*, on considère l'application $r : p_k C_b(\mathbb{\Gamma}) \to p_{k+1} C_b(\mathbb{\Gamma})$ donnée par $r(a) = v^*(a \otimes 1)v$ dans les isomorphismes $p_k C_b(\mathbb{\Gamma}) \simeq B(H_k)$. On peut alors considérer la limite inductive $C(\partial\mathbb{\Gamma}) = \varinjlim p_k C_b(\mathbb{\Gamma})$, qui est a priori un sous-espace de $\prod p_k C_b(\mathbb{\Gamma}) / \bigoplus p_k C_b(\mathbb{\Gamma}) = C_b(\mathbb{\Gamma})/C_0(\mathbb{\Gamma})$. Cette « frontière » $\partial\mathbb{\Gamma}$ est munie des applications canoniques $R_k : p_k C_b(\mathbb{\Gamma}) \to C(\partial\mathbb{\Gamma})$ dont les images engendrent $C(\partial\mathbb{\Gamma})$. Remarquons que $C_b(\mathbb{\Gamma})/C_0(\mathbb{\Gamma})$ s'interprète comme l'algèbre des fonctions sur le complémentaire de $\mathbb{\Gamma}$ dans le compactifié de Stone-Čech $\beta\mathbb{\Gamma}$.

Proposition 1.3.1 [4, Prop. 3.4, Lemma 3.9, Prop. 5.5] *Considérons un groupe quantique $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$, avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, non isomorphe aux duaux de $SU(2)$, $SU_{-1}(2)$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le sous-espace fermé $C(\partial\mathbb{\Gamma}) \subset C_b(\mathbb{\Gamma})/C_0(\mathbb{\Gamma})$ est une sous-C^*-algèbre unifère. De plus les états q-tr_k sur $p_k C_b(\mathbb{\Gamma})$ induisent un état ν sur $C(\partial\mathbb{\Gamma})$. Enfin les applications R_k sont complètement positives et injectives.*

La première partie de la proposition résulte de l'estimée $r^k(r^l(a)r^l(b)) \simeq r^{k+l}(a)r^{k+l}(b)$, uniformément en k quand $l \to \infty$, pour $a, b \in p_nC_b(\mathbb{F})$. Cette estimée se démontre par des calculs asymptotiques dans la catégorie $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$ du type du lemme 0.2.8. De même la seconde partie de la proposition s'obtient en démontrant une estimée $\nu(R_k(a)^*R_k(a)) = \lim q\text{-}\mathrm{tr}_{k+l}(r^l(a)^*r^l(a)) \geq C\, q\text{-}\mathrm{tr}_k(a^*a)$ pour $a \in p_kC(\partial\mathbb{F})$ et une constante $C > 0$.

L'étape suivante consiste à faire agir $\mathbb{F}$ sur $\partial\mathbb{F}$. Déjà dans le cas classique, cette action ne s'obtient pas par un « passage à la limite » naïf : en effet les sphères S_k ne sont pas stables par translation. Cependant, pour un élément $R_k(a) \in C(\partial\mathbb{F})$ provenant de $a \in p_k(\mathbb{F})$, on peut agir sur a et envoyer le résultat dans $C(\partial\mathbb{F})$ à l'aide des applications R_l. Il faut vérifier que le résultat ne dépend pas du représentant a choisi pour $R_k(a)$, ce qui résulte à nouveau d'estimées asymptotiques dans $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$. Cela revient également à montrer que l'action naturelle de $\mathbb{F}$ sur le compactifié de Stone-Čech $\beta\mathbb{F}$ passe au quotient, ce qui s'exprime de manière agréable au niveau des algèbres de fonctions :

Proposition 1.3.2 [4, Prop. 3.6 et 3.8] *On reprend les hypothèses de la proposition 1.3.1. Soit $B = C_b(\mathbb{F})/C_0(\mathbb{F}) = C(\beta\mathbb{F} \setminus \mathbb{F})$. Soit $\delta_l : B \to M(C_0(\mathbb{F})\otimes B)$, $\delta_r : B \to M(B\otimes C_0(\mathbb{F}))$ les coactions induites par le coproduit $\Delta : C_0(\mathbb{F}) \to M(C_0(\mathbb{F})\otimes C_0(\mathbb{F}))$. Alors on a $\delta_l(C(\partial\mathbb{F})) \subset M(C(\partial\mathbb{F}))\otimes C_0(\mathbb{F}))$ et $\delta_r(C(\partial\mathbb{F})) \subset C(\partial\mathbb{F})\otimes 1$.*

La seconde partie de l'énoncé signifie que l'action par translation à droite de $\mathbb{F}$ sur lui-même induit l'action triviale sur $\partial\mathbb{F}$: on dit parfois que la frontière $\partial\mathbb{F}$ est « petite à l'infini » [BO08, Def. 5.3.16]. Par ailleurs, on peut considérer l'*action ajointe* du groupe quantique dual $\mathbb{G} = \hat{\mathbb{F}}$ sur $\mathbb{F}$, définie par la coaction $\mathrm{ad} : C_0(\mathbb{F}) \to M(C_0(\mathbb{F})\otimes C(\mathbb{G}))$, $a \mapsto V_{\mathbb{F}}(a\otimes 1)V_{\mathbb{F}}^*$. Elle stabilise les sous-algèbres $p_kC_b(\mathbb{F})$ et il est facile de vérifier qu'elle est compatible avec les applications r du système injectif : on obtient ainsi une action, encore notée ad, de $\hat{\mathbb{F}}$ sur $\partial\mathbb{F}$.

À l'aide de l'action sur $\partial\mathbb{F}$ et de l'état ν, on démontre un analogue de la formule intégrale qui induit un isomorphisme entre l'espace mesurable associé à $\partial\mathbb{F}$ et la frontière de Poisson $\partial_P\mathbb{F}$: on obtient ainsi un résultat d'identification de la frontière de Poisson. Plus précisément, notons $L^\infty(\partial\mathbb{F})$ le bicommutant de l'image de $C(\mathbb{F})$ dans la représentation GNS associée à ν. On a alors :

Théorème 1.3.3 [4, Thm. 5.6] *On reprend les hypothèses de la proposition 1.3.1. Soit δ_l l'action à gauche de $\mathbb{F}$ sur $\partial\mathbb{F}$. Considérons l'application $\rho = (\mathrm{id}\otimes\nu)\delta_l : C(\partial\mathbb{F}) \to C_b(\mathbb{F}) = L^\infty(\mathbb{F})$. Alors ρ est à valeurs dans $H^\infty(\mathbb{F}, \mu)$ pour tout état central μ, et ρ est un $*$-homomorphisme pour la structure d'algèbre de $H^\infty(\mathbb{F}, \mu)$. De plus on a $\hat{\epsilon} \circ \rho = \nu$, et ρ induit un isomorphisme entre $L^\infty(\partial\mathbb{F})$ et $H^\infty(\mathbb{F}, q\text{-}\mathrm{tr}_1)$.*

Le point principal du théorème consiste à montrer que ρ est multiplicatif — notons que le produit de $C(\partial\mathbb{F})$ comme celui de $H^\infty(\mathbb{F}, \mu)$ sont définis de manière « non triviale ». Pour la surjectivité de ρ, on utilise la décomposition de $L^\infty(\partial\mathbb{F})$ en sous-espaces spectraux pour l'action adjointe de $\hat{\mathbb{F}}$, et on compare avec [INT06, Crl. 3.5]. Remarquons que ce dernier argument est « purement quantique » : en effet si $\mathbb{F}$ est un groupe discret usuel Γ, l'action adjointe est triviale.

Par ailleurs, on peut également relier la frontière de Gromov $\partial\mathbb{F}$ à la frontière de Martin $\partial_M\mathbb{F}$ introduite dans [NT04] pour tout groupe quantique discret. Plus précisément, dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$, il est facile de voir que le noyau de Martin $K : C_c(\mathbb{F}) \to C_b(\mathbb{F})$ associé à un état central μ se calcule à l'aide des applications r du système inductif, et des estimées asymptotiques permettent d'obtenir :

Proposition 1.3.4 [4, Thm. 5.8] *On reprend les hypothèses de la proposition 1.3.1. Soit $\mu \in L^\infty(\mathbb{F})_*$ un état central tel que* $\operatorname{Supp}\mu$ *est fini et engendre* $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$*, et K le noyau de Martin associé. Alors l'adhérence de l'image de $K(C_c(\mathbb{F}))$ dans $C_b(\mathbb{F})/C_0(\mathbb{F})$ est égale à $C(\partial\mathbb{F})$. Autrement dit, la frontière de Martin de $\mathbb{F}$ est égale à sa frontière de Poisson.*

Rappelons que dans le cadre quantique on ne connaît pas en général de résultat d'identification de la frontière de Poisson à l'aide de la frontière de Martin — autrement dit le théorème 1.3.3 ne résulte pas de la proposition 1.3.4.

Dans [VVV08] Vaes et Vander Vennet donnent une description de $\partial\mathbb{F}O(Q)$ à l'aide d'analogues des sphères de Podleś, en utilisant les équivalences monoïdales entre les groupes $\mathbb{F}O(Q)$ et les duaux des groupes $SU_q(2)$, puis l'identification de la frontière de Poisson du dual de $SU_q(2)$ avec la sphère de Podleś $SU_q(2)/T$ [Izu02, Thm. 5.9, 5.10]. Plus précisément, à une équivalence monoïdale entre $\mathbb{F}O(Q)$ et $SU_q(2)$ est associée une C^*-algèbre B, naturellement munie d'une action du tore T, engendrée par les entrées d'une matrice $w \in M_{2,N}(B)$ et les relations $w^*w = 1$, $ww^* = 1$ et $w = Q_q\bar{w}Q^{-1}$, où $Q_q \in GL_2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathbb{F}O(Q_q)$ est isomorphe au dual de $SU_q(2)$. Alors on a un isomorphisme équivariant $C(\partial\mathbb{F}) \simeq B^T$: on obtient ainsi une description de $\partial\mathbb{F}O(Q)$ « par générateurs et relations » [VVV08, Thm. 5.2 et 6.1].

Par ailleurs, dans [VVV10] la construction précédente de la frontière de Gromov $\partial\mathbb{F}$ est adaptée au cas des groupes quantiques libres unitaires $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(Q)$, et utilisée pour identifier la frontière de Poisson de ces groupes quantiques. De plus dans ce cas $L^\infty(\partial\mathbb{F})$ est isomorphe à un champ mesurable de facteurs ITPFI au-dessus de la frontière de Gromov classique du monoïde libre à deux générateurs [VVV10, Thm. 1.3].

3. Considérons à nouveau la construction de la frontière de Gromov $\partial\mathbb{F}O(Q)$ présentée précédemment. Les états $q\text{-tr}_k$ sur $p_kC_b(\mathbb{F})$ permettent de réaliser le système inductif $(p_kC_b(\mathbb{F}), r)$ à l'intérieur de l'espace $\ell^2(\mathbb{F})$. Plus précisément, on peut identifier l'espace GNS de $(p_kC_b(\mathbb{F}), q\text{-tr}_k)$ au sous-espace $p_k\ell^2(\mathbb{F})$ muni du vecteur cyclique $\xi_k = \lambda(\chi_k)\xi_0$, où $\chi_k = (\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{id})(r_k)$ est le caractère de la k^{e} coreprésentation irréductible. Les applications r du système inductif induisent alors une application contractante $\hat{r} \in B(\ell^2(\mathbb{F}))$ et on peut ainsi obtenir la construction GNS associée à $(C(\partial\mathbb{F}), \nu)$ comme $L^2(\partial\mathbb{F}) = \varinjlim(p_k\ell^2(\mathbb{F}), \hat{r})$ munie du vecteur cyclique $\xi_\infty = (\xi_k)_k$. La représentation régulière gauche de $\mathbb{C}[\mathbb{F}]$ sur $\ell^2(\mathbb{F})$ induit alors, de manière non triviale, une représentation sur $L^2(\partial\mathbb{F})$ qui implémente la coaction δ_l de la proposition 1.3.2.

Ce point de vue hilbertien permet de donner une interprétation du système inductif en termes d'arêtes ascendantes dans le graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ associé à $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ et $D = \{r_1\}$. En utilisant le projecteur ascendant « bilatère » p_{++}, on vérifie en effet qu'on a $\hat{r} = Bp_{++}S^*$. Notons que dans le cas $\mathbb{F} = \Gamma = F_N$ il faut renormaliser l'opérateur Bp_+S^* pour obtenir le « bon » système inductif hilbertien. Dans la suite de cette section nous montrons que, dans le cas quantique, l'opérateur de retournement Θ induit un système inductif hilbertien analogue dans l'espace des arêtes de $\mathbb{X}$: il s'agit là d'une particularité « purement quantique » du graphe de Cayley.

Plus précisément, on vérifie que $p_{+-}\Theta p_{+-}(p_n\otimes\mathrm{id}) = (p_{n+1}\otimes\mathrm{id})p_{+-}\Theta p_{+-}$: autrement dit $p_{+-}\Theta p_{+-}$ agit comme un opérateur de décalage dans la décomposition $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \bigoplus(p_n\otimes\mathrm{id})\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Ce comportement est très éloigné de l'involutivité de Θ dans le cas classique : en particulier on n'a même pas d'involutivité « q-déformée » comme dans les algèbres de Hecke. Rappelons que le projecteur p_{+-} est nul dans le cas classique.

On considère alors la limite du système inductif $((p_n\otimes\mathrm{id})\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}), p_{+-}\Theta p_{+-})$: c'est un espace de Hilbert noté $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$, appelé espace des arêtes à l'infini de $\mathbb{X}$. Chaque sous-espace $(p_n \otimes \mathrm{id})p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ s'envoie dans la limite inductive, et en sommant les applications linéaires correspondantes on obtient un opérateur non borné densément défini $\theta_\infty : p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$. On a le fait remarquable suivant, qui montre que la limite inductive $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ peut être réalisée naturellement comme un *sous-espace* de l'espace de Hilbert $p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, et dont la preuve est purement algébrique :

Proposition 1.3.5 [2, Prop. 6.2(1)] *Soit $\mathbb{F}$ un groupe quantique libre et $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$. Soit $\theta_\infty : p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ l'application canonique associée à la limite inductive $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$. Alors l'opérateur suivant est une co-isométrie :*

$$\Theta_\infty := \theta_\infty p_{+-}\Theta p_{++} : p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}).$$

On a vu à la fin de la section 1.2 que $p_{++} : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ est injectif mais pas surjectif en général, ce qui s'interprète en disant que l'espace des arêtes antisymétriques $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathrm{Ker}(\Theta + \mathrm{id})$ est « trop petit » dans le cas quantique. Ce « défaut » est bien sûr relié à la non-involutivité de l'opérateur de retournement Θ, et l'utilisation de l'espace des arêtes à l'infini permet de mieux comprendre la situation :

Théorème 1.3.6 [2, Prop. 6.2(2) et Thm. 6.5] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$, et $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ l'espace des arêtes à l'infini. Alors :*

1. *Si $\mathbb{F} = F$ est un groupe libre usuel on a $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}) = \{0\}$, et sinon $\dim \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}) = +\infty$.*
2. *Si la dimension quantique des éléments de D est différente de 2 on a*

$$p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = p_{++}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \oplus \Theta^*_\infty \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}). \tag{2}$$

La non-annulation de $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ signifie qu'on n'a pas d'involutivité « asymptotique » pour $\Theta(p_n \otimes \mathrm{id})$ quand $n \to \infty$. La dernière égalité montre que $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ mesure exactement le défaut de surjectivité de $p_{++} : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ — rappelons que Θ^*_∞ est isométrique. La preuve de ce théorème présente des aspects analytiques non triviaux, comparables à ceux du théorème 1.2.10 : l'analyse spectrale de $p_{+-}\Theta p_{+-}$ résulte notamment de celle de $p_{+-}\Theta p_{++}$. Quand la dimension quantique de l'un des éléments de D vaut 2, on montre que le sous-espace $p_{++}\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ n'est pas fermé, mais l'identité (2) reste valable si on le remplace par son adhérence.

Rappelons que le sous-espace $p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ correspond à un sous-espace $p_+C_0(\mathbb{X}^{(1)})p_-$, avec $p_+, p_- \in M(C_0(\mathbb{X}^{(1)}))$ des projections telles que $p_+p_- = 0$. Ce dernier sous-espace n'est pas une sous-algèbre, et en particulier il n'est pas clair qu'il existe un analogue C^*-algébrique $C(\mathbb{X}^{(1)}_\infty)$ de $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$: c'est la raison pour laquelle on a choisi le cadre hilbertien pour cette sous-section. Cependant, on peut construire une représentation de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$, qui est l'analogue de l'action de $\mathbb{\Gamma}$ sur la frontière $\partial\mathbb{\Gamma}$ associée à la marche aléatoire « usuelle » sur l'espace des sommets $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma})$.

Comme pour la frontière usuelle $\partial\mathbb{\Gamma}$, l'idée est de partir de la représentation naturelle $\lambda \otimes 1$ de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$, bien que celle-ci ne soit pas compatible avec le système inductif. Rappelons que $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ est la limite inductive des sous-espaces $(p_n \otimes \mathrm{id})p_{+-}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ relativement à l'application $p_{+-}\Theta p_{+-}$, et que Θ commute à l'action naturelle de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. On a donc clairement besoin du lemme suivant, qui montre que les projecteurs d'orientation commutent asymptotiquement à l'action de $\mathbb{\Gamma}$:

Lemme 1.3.7 [2, Lem. 7.1] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ et $D = \{r_1\}$, avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$ et $N > 1$. Soit $a \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ un coefficient de la coreprésentation fondamentale r_1. Alors il existe une constante $C_a > 0$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|[(\lambda(a)\otimes\mathrm{id}), p_{\star +}](p_k\otimes\mathrm{id})\| \leq C_a(\operatorname{qdim} r_k)^{-1}.$$

On peut alors construire la représentation de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$, en utilisant le même genre de techniques que pour la preuve de la proposition 1.3.2 — qui est en fait postérieure au théorème suivant :

Théorème 1.3.8 [2, Thm. 7.3] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \operatorname{Irr}\mathbb{F}$. Alors pour tous $a \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ et $\zeta \in p_{+-}(p_k\otimes\mathrm{id})\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ la limite suivante existe dans $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ et ne dépend que de $\theta_\infty(\zeta)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \theta_\infty(p_{+-}(\lambda(a)\otimes\mathrm{id})(p_{+-}\Theta p_{+-})^n\zeta) =: \lambda_\infty(a)\theta_\infty(\zeta).$$

De plus l'application $\lambda_\infty(a)$ ainsi définie s'étend en un opérateur borné sur $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$, et on obtient un $*$-homomorphisme $\lambda_\infty : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to B(\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}))$.

Le point délicat est la convergence des vecteurs $\theta_\infty(p_{+-}(\lambda(a)\otimes\mathrm{id})(p_{+-}\Theta p_{+-})^n\zeta)$ dans $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ — la preuve se simplifie cependant si $\operatorname{qdim} s > 2$ pour toutes les coreprésentations génératrices $s \in D$. En démontrant la convergence on obtient également l'estimée $\|\lambda_\infty(a)\| \leq (2n+1)^2\|\lambda(a)\|$ pour $a \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ coefficient d'une coreprésentation de longueur n dans le graphe de Cayley classique.

2 Applications en algèbres d'opérateurs

2.1 K-théorie

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus dans [1, 8] concernant la K-théorie des groupes quantiques discrets. Plus précisément, si $\mathbb{\Gamma}$ est un groupe quantique discret, on s'intéresse aux groupes de K-théorie usuels des C^*-algèbres associées, $K_*(C^*_r(\mathbb{\Gamma}))$ et $K_*(C^*_p(\mathbb{\Gamma}))$. Pour l'étude on est amené à utiliser les groupes de KK-théorie $\mathbb{\Gamma}$-équivariante $KK^{\mathbb{\Gamma}}(A, B)$, où A, B sont deux C^*-algèbres munies de coactions de $C_0(\mathbb{\Gamma})$. On a par exemple des morphismes de descente $j_r : KK^{\mathbb{\Gamma}}(A, B) \to KK(A \rtimes_r \mathbb{\Gamma}, B \rtimes_r \mathbb{\Gamma})$ et des isomorphismes naturels $KK(\mathbb{C}, A) \simeq K_0(A)$. Pour les détails techniques on renvoie à [BS89, Ver02, NV10].

1. Rappelons que le groupe quantique discret $\mathbb{\Gamma}$ est dit moyennable si le morphisme canonique $\lambda : C^*_p(\mathbb{\Gamma}) \to C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ est un isomorphisme. Ce morphisme induit un élément de KK-théorie équivariante, $[\lambda] \in KK(C^*_p(\mathbb{\Gamma}), C^*_r(\mathbb{\Gamma}))$, et on peut affaiblir la notion de moyennabilité de la manière suivante : on dit que $\mathbb{\Gamma}$ est *K-moyennable* si $[\lambda]$ est inversible comme élément de $KK(C^*_p(\mathbb{\Gamma}), C^*_r(\mathbb{\Gamma}))$. Dans le cas classique cette notion a été introduite par Cuntz [Cun83, Def. 2.2], qui l'utilise notamment pour ramener le calcul de la K-théorie des C^*-algèbres réduites de groupes libres à celui des C^*-algèbres pleines [Cun82].

Comme dans le cas classique, on montre que la K-moyennabilité de $\mathbb{\Gamma}$ est équivalente au fait que l'élément $[\mathrm{id}] \in KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ peut être représenté par un opérateur de Fredholm G sur un espace de Hilbert H muni d'une représentation de $\mathbb{\Gamma}$ qui soit *faiblement contenue dans la régulière* et qui commute à G modulo les opérateurs compacts. Notons que cet opérateur définit alors également un élément de $KK(C^*_r(\mathbb{\Gamma}), \mathbb{C})$.

Dans le cas d'un groupe discret usuel Γ agissant sur un arbre X muni d'une origine v_0, on prend $H = \ell^2(X^{(0)}) \oplus \ell^2_\wedge(X^{(1)})$ et $G = F + F^*$, où F est l'*opérateur de Julg-Valette*, qui envoie chaque arête sur son extrémité la plus éloignée de l'origine. Plus précisément, F est la restriction de Bp_+ à $\ell^2_\wedge(X^{(1)})$, où p_+ est le projecteur de l'orientation ascendante relative à v_0. Il est clair que F est une isométrie de co-rang 1, donc $F + F^*$ est un opérateur de Fredholm, de plus gFg^{-1}, pour $g \in \Gamma$, est l'analogue de F obtenu en remplaçant v_0 par gv_0, et on en déduit que F commute à l'action des éléments de Γ modulo des opérateurs de rang fini. Si, de plus, les représentations de Γ sur $\ell^2(X^{(0)})$, $\ell^2(X^{(1)})$ sont faiblement contenues dans la régulière, on en déduit la K-moyennabilité de Γ.

Cette construction est facilement transportable au cas de l'arbre de Bass-Serre quantique $\mathbb{X}$ associé à un produit libre amalgamé $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 *_\mathbb{\Lambda} \mathbb{\Gamma}_1$ de groupes quantiques discrets. On peut considérer en effet l'opérateur $F : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ qui est la restriction de Bp^i_+, où p^i_+ est l'un des deux opérateurs d'orientation ascendante introduits à la section 1.2. Dans ce cas, il est clair que $p^i_+ : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to p^i_+\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ est en fait un isomorphisme (non-équivariant) et les remarques faites dans la section 1.2 montrent que F est une isométrie de co-rang 1. On montre de plus :

Proposition 2.1.1 [1, Thm. 3.3] *Soit $\mathbb{X}$ l'arbre de Bass-Serre quantique d'un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{\Gamma}_0 *_\mathbb{\Lambda} \mathbb{\Gamma}_1$. On note p^i_+ le projecteur d'orientation ascendante associé à l'origine $\mathbb{\Gamma}_i \in \mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Gamma}_i$, et $F = Bp^i_+ : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ l'opérateur de Julg-Valette associé.*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, l'opérateur $xF - Fx$ est de rang fini.*
   En particulier $F + F^*$ définit un élément $\gamma \in KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
2. *On a $\gamma = [\mathrm{id}]$ dans $KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

Rappelons que $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ est l'espace GNS associé à la forme linéaire positive $\epsilon_{\mathbb{\Lambda}} \circ E$: $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathbb{C}$, où $\epsilon_{\mathbb{\Lambda}}$ est la co-unité de $\mathbb{\Lambda}$, et $E : C_r^*(\mathbb{\Gamma}) \to C_r^*(\mathbb{\Lambda})$ est l'espérance conditionnelle canonique. Si $\mathbb{\Lambda}$ est moyennable, ϵ s'étend à $C_r^*(\mathbb{\Lambda})$, et on voit donc que la représentation de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma}/\mathbb{\Lambda})$ s'étend à $C_r^*(\mathbb{\Gamma})$, c'est-à-dire que la représentation correspondante de $\mathbb{\Gamma}$ est faiblement contenue dans la régulière. Ainsi, si $\mathbb{\Gamma}_0, \mathbb{\Gamma}_1$ sont moyennables, les représentations de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$, $\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ sont faiblement contenues dans la régulière, et on obtient :

Théorème 2.1.2 [1, Thm. 3.3] *Tout produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets moyennables est K-moyennable.*

Dans le cas classique, ce résultat est prouvé dans [Cun83, Thm. 2.4] pour un produit libre de groupes discrets K-moyennables, puis dans [JV84, Crl. 4.2] pour un produit libre amalgamé de groupes discrets moyennables, et enfin dans [Pim86, Crl. 19] pour un produit libre amalgamé de groupes discrets K-moyennables, ou plus généralement, pour un groupe discret agissant sur un arbre avec stabilisateurs K-moyennables. Dans le cas quantique, le cas non amalgamé, ou amalgamé au-dessus d'un sous-groupe fini, peut être traité en utilisant les méthodes de [Ger96, Ger97] qui traite des produits libres de C^*-algèbres en général. Il semble raisonnable de conjecturer le résultat suivant :

Problème 2.1.3 Montrer qu'un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets *K-moyennables* est lui-même K-moyennable. □

Notons par ailleurs que les méthodes exposées ci-dessus, et notamment la construction de l'opérateur de Julg-Valette associé à un arbre de Bass-Serre quantique, on été récemment utilisées par Fima pour démontrer la K-moyennabilité des extensions HNN de groupes quantiques discrets moyennables [Fim12, Thm. 5.1].

Dans le cas du graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$, la construction de l'opérateur de Julg-Valette et son étude sont plus délicates. On dispose du projecteur d'orientation $p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}$ introduit dans la section 1.2, et on peut donc considérer l'opérateur $F_0 = Bp_{++}$ restreint à $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$. Cependant, la proposition 1.2.8 et le théorème 1.2.10 montrent que $F_0 + F_0^*$ n'est pas un opérateur de Fredhlom — l'image de F_0 est de codimension infinie. La solution est indiquée par le théorème 1.3.6 : l'espace $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ est trop petit et on doit plutôt considérer

$$F = B(p_{++} + \Theta_\infty^*) : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \oplus \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)}),$$

qui est injectif, et dont l'image est $\xi_0^\perp$ si les dimensions quantiques des générateurs de $\mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$ sont différentes de 2. En particulier, dans ce cas c'est un opérateur de Fredholm, qui est un candidat naturel pour jouer le rôle d'opérateur de Julg-Valette. Grâce au lemme 1.3.7 on peut de plus étudier la commutation de F aux actions de $\mathbb{C}[\mathbb{F}]$ et on obtient :

Proposition 2.1.4 [2, Thm. 8.5] *Soit $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}$ un groupe quantique libre tel que les dimensions quantiques des générateurs de $\mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$ soient différentes de 2. Soit $F : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \oplus \ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ l'opérateur de Julg-Valette associé au graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ de $\mathbb{\Gamma}$. Alors F commute à l'action de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ modulo des opérateurs compacts. En particulier $F + F^*$ définit un élément $\delta \in KK^{\mathbb{\Gamma}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ d'indice 1.*

On peut noter qu'à la différence de ce qui se passe dans les arbres classiques ou les arbres de Bass-Serre quantiques, le commutateur $[F, x]$ avec $x \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ est compact mais pas de rang fini. Dans l'optique de la K-moyennabilité, on doit également se demander si les représentations de $\mathbb{\Gamma}$ considérées pour la construction de δ sont faiblement contenues dans la régulière. Pour les espaces $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$, $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ c'est évident car on a $\ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) = \ell^2(\mathbb{F})$ et $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \subset \ell^2(\mathbb{F})\otimes p_1\ell^2(\mathbb{F})$. Pour $\ell^2_\infty(\mathbb{X}^{(1)})$ cela résulte de l'estimée de norme $\|\lambda_\infty(a)\| \leq (2n+1)^2\|\lambda(a)\|$, pour a « de longueur n », qui intervient dans la preuve du théorème 1.3.8, et de propriétés de propagation dans $\mathbb{C}[\mathbb{F}]$. Pour obtenir la K-moyennabilité de $\mathbb{F}$ il reste ainsi à montrer l'analogue de la deuxième partie de la proposition 2.1.1, c'est-à-dire l'égalité $\delta = 1$ dans $KK^{\mathbb{F}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Dans [2], cette question est laissée en suspens.

Le problème de la K-moyennabilité est résolu par Voigt [Voi11] dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$, et dans [8] pour le cas général, comme on le verra plus loin. En fait le calcul explicite des groupes de K-théorie effectué dans [Voi11, 8] permet de montrer *a posteriori*, et par des arguments fonctoriels, qu'on a bien $\delta = 1$, de sorte que la K-moyennabilité est bien réalisée par l'élément de Julg-Valette « géométrique » construit dans [2]. Cependant le problème suivant reste ouvert :

Problème 2.1.5 Construire une homotopie explicite entre δ et $[\mathrm{id}] \in KK^{\mathbb{F}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ qui admette une interprétation géométrique dans le graphe de Cayley quantique associé au groupe quantique libre $\mathbb{F}$. □

2. L'article [8] traite de la propriété de Baum-Connes forte. On utilise l'approche à la conjecture de Baum-Connes [BC00, BCH94] en termes de catégories triangulées, due à Meyer et Nest [MN06], qui permet de formuler un analogue de la conjecture pour les groupes quantiques discrets *sans torsion* [Mey08].

Plus précisément, on travaille dans la catégorie $KK^{\mathbb{F}}$, dont les objets sont les C^*-algèbres munies de coactions de $C_0(\mathbb{F})$, et les morphismes sont les éléments des groupes $KK^{\mathbb{F}}(A,B)$. Cette catégorie est *triangulée* : on dispose d'un foncteur de suspension $\Sigma A = A\otimes C_0(\mathbb{R})$, et d'une classe de triangles distingués vérifiant certains axiomes. Les « triangles » en question sont les diagrammes induits par les cônes applicatifs $C_f = \{(a,b) \in A \oplus C_0(]0,1], B) \mid f(a) = b(1)\}$ associés aux $*$-homomorphismes $\mathbb{F}$-équivariants $f : A \to B$:

$$\Sigma B \xrightarrow{i_{\mathrm{can}}} C_f \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{f} B,$$

et les diagrammes isomorphes dans $KK^{\mathbb{F}}$. L'intérêt de ces diagrammes est clair : d'après la suite exacte de Puppe, on sait en effet qu'ils induisent des suites exactes cycliques pour les groupes de KK-théorie équivariante.

Meyer et Nest considèrent alors la sous-catégorie pleine $TI_{\mathbb{F}}$ dont les objets sont les $\mathbb{F}$-C^*-algèbres de la forme $A\otimes C_0(\mathbb{F})$, avec action triviale sur A, et la *sous-catégorie localisante* engendrée $\langle TI_{\mathbb{F}}\rangle$. Il s'agit de la plus petite sous-catégorie pleine de $KK^{\mathbb{F}}$ stable par suspension, $KK^{\mathbb{F}}$-équivalence, somme directe dénombrable, et par complétion des triangles : si A, $B \in \langle TI_{\mathbb{F}}\rangle$ et $\Sigma B \to C \to A \to B$ est un triangle, alors $C \in \langle TI_{\mathbb{F}}\rangle$.

Définition 2.1.6 *Soit $\mathbb{F}$ un groupe quantique discret. On dit que $\mathbb{F}$ vérifie la* propriété de Baum-Connes forte *relativement au sous-groupe trivial si $\langle TI_{\mathbb{F}}\rangle = KK^{\mathbb{F}}$.*

Dans le cas ou $\mathbb{F} = \Gamma$ est un groupe discret sans torsion, cette propriété équivaut à l'existence d'un *élément* γ pour Γ tel que $\gamma = 1$ dans $KK^{\Gamma}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ [MN06, Thm. 8.3]. Dans le cas où Γ a de la torsion, il faut remplacer TI_Γ par la sous-catégorie pleine CI_Γ des Γ-C^*-algèbres induites d'une action d'un sous-groupe compact. Cependant, dans le cas quantique la notion de torsion est plus délicate, et on obtient en tout état de cause une propriété plus forte en ne considérant que le sous-groupe trivial. La propriété de Baum-connes forte n'est pas vraie pour tous les groupes, déjà dans le cas classique : elle implique par exemple la K-moyennabilité, donc n'est pas vérifiée par les groupes qui ont la propriété (T) de

Kazhdan. On peut formuler dans le langage des catégories triangulées diverses variantes moins fortes de la conjecture de Baum-Connes, mais nous n'en auront pas besoin dans ce mémoire et nous renvoyons à [MN06] pour plus de détails.

Dans [8] nous démontrons la stabilité de la propriété de Baum-Connes forte par produit libre. Dans le cas classique cette propriété de stabilité résulte des résultats de Oyono-oyono [OO01, Thm. 1.1] et Tu [Tu99, Thm. 3.1] pour les groupes agissant sur les arbres.

Dans le cas quantique, nous utilisons de même l'arbre de Bass-Serre quantique $\mathbb{X}$ associé à un produit libre $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$, et nous adaptons à ce cadre une construction des éléments Dirac et dual-Dirac due à Kasparov et Skandalis pour les groupes agissant sur des immeubles [KS91]. On note $E = \Omega_0 \sqcup \Delta \sqcup \Omega_1$ la droite affine partitionnée en un intervalle compact Δ et deux intervalles ouverts infinis Ω_i, et $\ell^2(\mathbb{X}) = \ell^2(\mathbb{X}^{(0)}) \oplus \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$. On identifie $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ à $\ell^2(\mathbb{F})$ via la projection de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}e_0$: les opérateurs but et source correspondent alors aux opérateurs $T_i : \ell^2(\mathbb{F}) \to \ell^2(\mathbb{F}/\mathbb{F}_i) \subset \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$. Enfin, on considère la sous-C^*-algèbre $\mathscr{P} \subset C_0(E)\otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$ engendrée, comme sous-espace fermé, par

- $C_0(E)\otimes C_c(\mathbb{F})$, $C_0(E)\otimes C_c(\mathbb{F}/\mathbb{F}_i)$,
- $C_0(\Omega_i)\otimes(T_iC_c(\mathbb{F}))$, $C_0(\Omega_i)\otimes(T_iC_c(\mathbb{F}))^*$, $C_0(\Omega_i)\otimes(T_iC_c(\mathbb{F}))^*(T_iC_c(\mathbb{F}))$,

pour $i = 0, 1$. Autrement dit $\mathscr{P}$ est engendrée par les algèbres de fonctions sur les arêtes, sur les sommets, et par les opérateurs but et source, avec des conditions de support sur E. Notons que si T_i est en général non borné, la composée $T_i f$, pour $f \in C_c(\mathbb{F})$, est toujours bornée.

On vérifie alors que la sous-C^*-algèbre $\mathscr{P}$ est stable relativement à l'action de $\mathbb{F}$ sur $\ell^2(\mathbb{X})$. L'inclusion $\Sigma\mathscr{P} \subset \Sigma C_0(E)\otimes K(\ell^2(\mathbb{X}))$ définit ainsi un élément « Dirac » $D \in KK^{\mathbb{F}}(\Sigma\mathscr{P}, \mathbb{C})$, via l'isomorphisme de périodicité de Bott et l'équivalence de Morita équivariante $K(\ell^2(\mathbb{X})) \sim_M \mathbb{C}$. En combinant cette construction avec celle de l'élément γ de la proposition 2.1.1, on définit également un élément « dual-Dirac » $\eta \in KK^{\mathbb{F}}(\mathbb{C}, \Sigma\mathscr{P})$ tel que $\eta\otimes D = \gamma = [\mathrm{id}]$. Dans le cas classique, le « rotation trick » permet, en utilisant la réalisation géométrique de $\mathbb{X}$, d'obtenir l'identité $D\otimes\eta = [\mathrm{id}]$, donc l'isomorphisme $\Sigma\mathscr{P} \simeq \mathbb{C}$ dans $KK^{\mathbb{F}}$. Dans le cas quantique on ne dispose pas de réalisation géométrique de $\mathbb{X}$, et on ne sait établir l'isomorphisme $\Sigma\mathscr{P} \simeq \mathbb{C}$ que dans KK, par le calcul des groupes $K_*(\mathscr{P})$. Cependant en présence de la propriété de Baum-Connes forte on parvient à passer de KK à $KK^{\mathbb{F}}$ et on obtient :

Théorème 2.1.7 [8, Thm. 6.6] *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 * \mathbb{F}_1$ un produit libre de groupes quantiques discrets, et $\mathbb{X}$ son arbre de Bass-Serre quantique. On note D, η, γ les éléments de KK-théorie $D\mathbb{F}$-équivariante associés à $\mathbb{X}$. Si $\mathbb{F}_0$ et $\mathbb{F}_1$ vérifient la propriété de Baum-Connes forte, alors $\Sigma\mathscr{P} \in \langle TI_{\mathbb{F}}\rangle$ et $D\otimes\eta = [\mathrm{id}]$ dans $KK^{\mathbb{F}}(\Sigma\mathscr{P}, \Sigma\mathscr{P})$. De plus, $\mathbb{F}$ vérifie la propriété de Baum-Connes forte.*

On notera que le théorème ci-dessus fait apparaître le *double de Drinfel'd* $D\mathbb{F}$ de $\mathbb{F}$. Ce point technique provient de la nécessité d'effectuer des produits tensoriels dans $KK^{\mathbb{F}}$: la première partie de l'énoncé montre que $\mathbb{C} \in \langle TI_{\mathbb{F}}\rangle$, et on obtient $\langle TI_{\mathbb{F}}\rangle = KK^{\mathbb{F}}$ en tensorisant par une algèbre $A \in KK^{\mathbb{F}}$ quelconque. Or, dans le cas quantique, le produit tensoriel de deux C^*-algèbres A, B munies de coactions de $C_0(\mathbb{F})$ n'est pas lui-même muni naturellement d'une coaction de $C_0(\mathbb{F})$. On peut néanmoins construire un produit tensoriel tressé $A \boxtimes B \in KK^{\mathbb{F}}$, qui vérifie les mêmes propriétés fonctorielles que le produit tensoriel usuel, si A et B sont munies d'actions de $\mathbb{F}$ *et de son dual* $\hat{\mathbb{F}}$ ou, ce qui revient au même, d'une action du double de Drinfel'd $D\mathbb{F}$. Pour la preuve du théorème on doit donc vérifier que toutes les constructions précédentes sont compatibles avec les actions naturelles du dual $\hat{\mathbb{F}}$ — dans le cas classique ces vérifications n'ont pas lieu d'être car les actions en question sont triviales. Pour les détails techniques on renvoie à [NV10, Sec. 3].

3. Nous appliquons dans [8] ce résultat de stabilité par produit libre aux groupes quantiques libres. En effet, Voigt a démontré dans [Voi11] que les groupes quantiques libres orthogonaux $\mathbb{F}O(Q)$ satisfont la propriété de Baum-Connes forte, et d'autre part on dispose d'une inclusion $\mathbb{F}U(Q) \hookrightarrow \mathbb{F}O(Q) * \mathbb{Z}$ pour $Q\bar{Q} = \pm I_N$ [Ban97, Thm. 1 (iv)], déjà évoquée dans la section 1.2. Comme $\mathbb{Z}$ est moyennable, il satisfait la propriété de Baum-Connes forte, et il est facile de démontrer la stabilité de cette conjecture par passage aux sous-groupes *divisibles* [8, Lem. 6.7]. En combinant le théorème 2.1.7 et la proposition 1.2.5 on obtient donc la propriété de Baum-Connes fortes pour les groupes quantiques libres unitaires $\mathbb{F}U(Q)$ tels que $Q\bar{Q} = \pm I_N$.

QUESTION 2.1.8 La propriété de Baum-Connes forte est-elle stable par passage aux sous-groupes *non nécessairement divisibles* d'un groupe quantique discret ? □

Pour passer au cas général $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ on invoque un argument d'équivalence monoïdale. On sait d'après [DRVV10, Sec. 6] que l'équivalence monoïdale entre deux groupes quantiques discrets $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ induit une correspondance bijective entre les actions des groupes duaux $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$. Plus précisément, Voigt montre que cette correspondance est en fait une équivalence entre les catégories triangulées $KK^{\mathbb{G}_1}$, $KK^{\mathbb{G}_2}$ [Voi11, Thm. 8.5]. Par dualité de Baaj-Skandalis on obtient une équivalence entre $KK^{\mathbb{F}_1}$ et $KK^{\mathbb{F}_2}$, qui fait se correspondre les actions induites du sous-groupe trivial : ainsi la propriété de Baum-Connes forte est stable par équivalence monoïdale. Voigt utilise ce fait dans [Voi11] pour ramener la propriété de Baum-Connes forte pour $\mathbb{F}O(Q)$ au cas des duaux des groupes $SU_q(2)$. Dans notre cas, on sait d'après [BDRV06, Crl. 6.3] qu'on peut toujours trouver une matrice $R \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $R\bar{R} \in \mathbb{C}I_2$ et $\mathbb{F}U(Q)$ est monoïdalement équivalent à $\mathbb{F}U(R)$. On obtient ainsi :

Théorème 2.1.9 [8, Thm. 6.9] *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(P_1) * \cdots * \mathbb{F}U(P_k) * \mathbb{F}O(Q_1) * \cdots * \mathbb{F}O(Q_l)$ un groupe quantique libre, avec P_i, Q_j inversibles et $Q_j\bar{Q}_j = \pm I$. Alors $\mathbb{F}$ vérifie la propriété de Baum-Connes forte.*

Remarquons que Brannan a démontré la propriété de Haagerup pour les groupes quantiques libres $\mathbb{F}O(N)$ et $\mathbb{F}U(N)$ [Bra12a, Thm. 4.5, Crl. 4.9] et leurs produits libres. Dans le cas classique, on sait que la propriété de Haagerup implique la propriété de Baum-Connes forte [HK01, Thm. 1.1].

QUESTION 2.1.10 La propriété de Haagerup pour les groupes quantiques discrets implique-t-elle la propriété de Baum-Connes forte ? □

La propriété de Baum-Connes forte permet de calculer les groupes de K-théorie des C^*-algèbres $C^*_r(\mathbb{F})$ associées aux groupes quantiques libres $\mathbb{F}$. Meyer [Mey08, Thm. 4.6 et Sec. 5.1] démontre le fait général suivant dans la catégorie triangulée $KK^{\mathbb{F}}$. Notons $TC_{\mathbb{F}}$ la sous-catégorie pleine de $KK^{\mathbb{F}}$ formée par les $\mathbb{F}$-C^*-algèbres N telles que $N \simeq 0$ dans KK. Alors, pour toute $\mathbb{F}$-C^*-algèbre A, il existe une « meilleure approximation » $\tilde{A} \in \langle TI_{\mathbb{F}} \rangle$ munie d'un morphisme $\tilde{A} \to A$ dans $KK^{\mathbb{F}}$ qui s'insère dans un triangle $\Sigma N \to \tilde{A} \to A \to N$ avec $N \in TC_{\mathbb{F}}$. De plus $\tilde{A}$ est unique à isomorphisme près et dépend fonctoriellement de A. On dit que les sous-catégories localisantes $\langle TI_{\mathbb{F}} \rangle$, $TC_{\mathbb{F}}$ sont complémentaires, et le morphisme $\tilde{A} \to A$ est appelé morphisme de Dirac abstrait pour A. Ce morphisme induit un homomorphisme $\mu_A : K_*(\tilde{A} \rtimes_r \mathbb{F}) \to K_*(A \rtimes_r \mathbb{F})$, et on dit que $\mathbb{F}$ vérifie la *conjecture de Baum-Connes à coefficients* dans A, relativement au sous-groupe trivial, si μ_A est un isomorphisme. C'est en particulier le cas si la propriété de Baum-Connes forte est vérifiée : en effet on peut alors prendre $\tilde{A} = A$.

Contrairement à l'énoncé classique de la conjecture, cette approche ne donne pas de modèle topologique pour calculer le membre de gauche $K_*(\tilde{A} \rtimes \mathbb{F})$. Cependant, dans certaines situations, ce groupe peut être calculé par des outils de topologie algébrique. Plus précisément, on appelle résolution T-projective de A une résolution de la forme

$$\cdots \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0,$$

où les algèbres $C_i \in KK^{\mathbb{F}}$ sont des facteurs directs d'algèbres dans $TI_{\mathbb{F}}$, et qui est exacte en KK-théorie *non équivariante*, c'est-à-dire que la suite

$$\cdots \to KK(X, C_2) \to KK(X, C_1) \to KK(X, C_0) \to KK(X, A) \to 0,$$

est exacte pour toute C^*-algèbre X. On montre alors que la résolution induit une suite spectrale qui converge vers $K(\tilde{A} \rtimes_r \mathbb{F})$ [Mey08, Thm. 4.15]. Le cas où la résolution est de longueur 1, c'est-à-dire où $C_2 = 0$, est particulièrement simple : dans ce cas elle induit un triangle $\Sigma\tilde{A} \to C_1 \to C_0 \to \tilde{A}$ [MN10, Lem. 3.12] et donc une suite exacte cyclique

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0 \rtimes_r \mathbb{F}) & \to & K_0(\tilde{A} \rtimes_r \mathbb{F}) & \to & K_1(C_1 \rtimes_r \mathbb{F}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(C_1 \rtimes_r \mathbb{F}) & \leftarrow & K_1(\tilde{A} \rtimes_r \mathbb{F}) & \leftarrow & K_1(C_0 \rtimes_r \mathbb{F}). \end{array}$$

Dans [8] nous construisons une telle résolution pour l'action triviale d'un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ sur $A = \mathbb{C}$, avec $C_0 = C_0(\mathbb{F})$ et $C_1 = C_0(\mathbb{F})^2$. La K-théorie de $C_0(\mathbb{F}) \rtimes_r \mathbb{F} \simeq K(\ell^2\mathbb{F})$ est bien connue, et comme la conjecture de Baum-Connes est satisfaite on a $K_*(\tilde{\mathbb{C}} \rtimes_r \mathbb{F}) = K_*(C_r^*(\mathbb{F}))$. On obtient ainsi :

Théorème 2.1.11 [8, Thm. 7.2] *Soit $N > 1$, $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ et $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(Q)$. Alors le morphisme naturel $C_p^*(\mathbb{F}) \to C_r^*(\mathbb{F})$ induit un isomorphisme en KK-théorie et on a $K_0(C_r^*(\mathbb{F})) \simeq \mathbb{Z}$, $K_1(C_r^*(\mathbb{F})) \simeq \mathbb{Z}^2$.*

Il est alors naturel de poser les questions suivantes. Notons que le dual de $S_{N^2}^+$ est monoïdalement équivalent au dual de $Aut^+(M_N(\mathbb{C}))$, qui est isomorphe à un sous-groupe *non divisible* de $\mathbb{F}O_N$.

Question 2.1.12 Les groupes quantiques discrets duaux de S_N^+ et de H_N^{s+} vérifient-ils la propriété de Baum-Connes forte ? Quelle est la K-théorie de leur C^*-algèbre réduite ? □

2.2 Propriétés C^*-algébriques

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus dans [2, 3, 4] concernant les propriétés C^*-algébriques des groupes quantiques libres : la propriété de décroissance rapide, la propriété d'Akemann-Ostrand et l'exactitude.

1. La *propriété de décroissance rapide* apparaît pour la première fois dans l'article fondateur de Haagerup concernant les C^*-algèbres réduites associées aux groupes libres [Haa79, Lemma 1.4]. La définition dans le cadre général des groupes discrets, ainsi que de nombreux exemples, est présentée dans [Jol90]. Considérons l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbb{F}]$ d'un groupe discret de type fini, muni d'un système de générateurs D tel que $e \notin D$ et $D^{-1} = D$. On note $\mathbb{C}[\mathbb{F}]_n$ le sous-espace engendré par les opérateurs $\lambda(g)$, où $g \in \Gamma$ est à distance n de l'origine dans le graphe de Cayley associé à (Γ, D). Pour $x \in \mathbb{C}[\Gamma]$, on note $\|x\|_r = \|\lambda(x)\|$ la norme de x dans $C_r^*(\mathbb{F})$, et $\|x\|_2 = \|\Lambda(x)\|$ sa norme dans $\ell^2(\Gamma)$, via l'application GNS associée à la mesure de Haar. Il est clair que $\|x\|_2 \leq \|x\|_r$, et on dit que Γ a la propriété de décroissance rapide (RD) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|x\|_r \le P(n)\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}[\Gamma]_n$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ — une telle inégalité est également appelée *inégalité de Haagerup*. Il est facile de voir que cette notion (et le degré optimal du polynôme P) ne dépendent pas du système de générateurs D.

Il est facile d'étendre cette définition au cas des groupes quantiques discrets $\mathbb{F}$ *de type fini*, c'est-à-dire pour lesquels il existe un sous-ensemble fini $D \subset \operatorname{Irr}\mathbb{F}$, tel que $1 \notin D$ et $\bar{D} = D$, qui engendre $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$. Il suffit en effet de recopier la définition précédente en considérant le sous-espace $\mathbb{C}[\mathbb{F}]_n$ engendré par les coefficients des coreprésentations $r \in \mathbb{F}$ qui sont à distance n de l'origine dans le graphe de Cayley classique associé à $(\mathbb{F}, D)$, au sens de la définition 0.2.9. D'autres formulations équivalentes de cette définition, analogues à celles connues dans le cas classique, sont donnée dans [3, Prop. 3.5].

Dans l'article [3] nous généralisons au cas quantique quelques résultats classiques concernant la propriété RD : on montre par exemple que dans le cas moyennable, la propriété RD est équivalente à la croissance polynômiale, au sens de la définition 0.2.10. En particulier les duaux des groupes de Lie compacts ont la propriété RD, ainsi que le dual du groupe quantique compact $SU_{-1}(2)$. D'autre part, on montre que la propriété RD implique l'*unimodularité* pour les groupes quantiques discrets. Ainsi les duaux des groupes quantiques compacts $SU_q(2)$, pour $q \in]0,1[$, et plus généralement les groupes quantiques discrets $\mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, Q non unitaire, n'ont pas la propriété RD.

Le résultat principal de [3] est la preuve de la propriété RD pour les groupes quantiques libres, orthogonaux et unitaires, qui sont unimodulaires : c'est l'analogue du résultat de Haagerup pour les groupes libres usuels F_N. La preuve de la propriété RD pour F_N repose sur l'étude de la combinatoire des mots réduits. Dans le cas de $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$, on ne dispose pas d'arguments analogues, et on donne une formulation équivalente de la propriété RD dans la catégorie $\operatorname{Corep}\mathbb{F}$: notant H_k l'espace de la k^{e} représentation irréductible r_k, on montre que $\mathbb{F}$ a la propriété RD **ssi** le cône des tenseurs décomposables dans $H_k \otimes H_n$ est « asymptotiquement loin », quand $n \to \infty$, de l'unique sous-espace équivalent à H_l — cf [3, Éq. 4.4] pour l'énoncé quantitatif. En utilisant les lemmes techniques de [2] on obtient finalement :

Théorème 2.2.1 [3, Thm. 4.9 et Thm. 4.10] *Soit $Q \in GL_N(\mathbb{C})$. Alors $\mathbb{F}O(Q)$ (si $Q\bar{Q} = \pm I_N$) et $\mathbb{F}U(Q)$ ont la propriété RD **ssi** ils sont unimodulaires, c'est-à-dire **ssi** Q est unitaire à un scalaire près.*

Notons de plus que le facteur $P(n)$ obtenu dans la majoration des normes $\|x\|_r$, $x \in \mathbb{C}[\mathbb{F}]_n$ est *linéaire* en n. C'est optimal, comme on le voit pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}O_N$ en considérant les caractères $\chi_n = (\operatorname{Tr} \otimes \mathrm{id})(r_n) \in \mathbb{C}[\mathbb{F}]_n$. En effet, on sait d'après la théorie de Peter-Weyl-Woronowicz que $\|\chi_n\|_2 = 1$ pour tout n, et d'après les travaux de Banica que la sous-C^*-algèbre engendrée par les χ_n dans $C^*_r(\mathbb{F})$ est isomorphe à $C([-2,2])$ — les éléments χ_n correspondant à des polynômes de Tchebychev —, si bien que $\|\chi_n\|_r = n+1$.

Depuis [3] l'étude de la propriété RD pour les groupes quantiques discrets a été poursuivie, notamment par Brannan. Il montre ainsi, par des méthodes analogues à celles de [3], que les duaux des groupes d'automorphismes quantiques $Aut^+(B,\tau)$ vérifient la propriété RD [Bra12c, Thm. 4.10]. Par ailleurs, on sait que dans le cas d'un groupe libre usuel F_N la propriété RD peut être améliorée si on se restreint à la sous-algèbre (non involutive) de $\mathbb{C}[F_N]$ engendrée par les générateurs de F_N (mais pas leurs inverses) : le facteur $P(n) = n+1$ peut alors être remplacé par un facteur $\sqrt{e}\sqrt{n+1}$ [KS07, Thm. 1.4]. Brannan démontre un résultat analogue pour la sous-algèbre (non involutive) de $\mathbb{C}[\mathbb{F}U(I_N)]$ engendrée par les générateurs u_{ij} [Bra12b, Thm. 6.3]. Enfin, dans le cas des groupes libres, on a également une version « à valeurs opérateurs » de l'inégalité de Haagerup [Buc99, Thm. 2.8], ce qui amène la question suivante :

PROBLÈME 2.2.2 Démontrer un analogue de l'inégalité de Haagerup à valeurs opérateurs pour les groupes quantiques libres $\mathbb{F}O_N$. □

L'inégalité de Haagerup et la propriété RD sont des outils extrêmement utiles en algèbres d'opérateurs. La motivation initiale de Haagerup était de démontrer la *propriété d'approximation métrique* pour les C^*-algèbres non nucléaires $C_r^*(F_N)$, en combinant propriété RD et propriété de Haagerup. Rappelons qu'un espace de Banach X a la propriété d'approximation métrique (MAP) s'il existe une suite généralisée d'applications contractives et de rang fini $\phi_n : X \to X$ qui converge vers l'identité pour la topologie de la convergence simple en norme : $\|\phi_n(x) - x\| \to 0$ pour tout $x \in X$. Dans [Bra12a, Thm. 4.5 et Crl. 4.9], Brannan démontre la propriété de Haagerup pour $\mathbb{F}O_N$ et $\mathbb{F}U_N$; en utilisant le théorème 2.2.1 la propriété d'approximation métrique pour $C_r^*(\mathbb{F}O_N)$ et $C_r^*(\mathbb{F}U_N)$ en découle immédiatement.

La propriété RD a été également utilisée en K-théorie, dans le contexte de la conjecture de Baum-Connes. Plus précisément, considérons les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma)$, pour $s \geq 0$, obtenus en complétant $\mathbb{C}[\Gamma]$ pour les normes $\|\sum \lambda_g g\|_{2,s}^2 = \sum d(1,g)^{2s}|\lambda_g|^2$, où on utilise la distance d dans un graphe de Cayley associé à Γ. Les espaces $H^s(\Gamma)$ s'identifient naturellement à des sous-espaces de $\ell^2(\Gamma)$, tout comme $C_r^*(\Gamma)$ via l'application GNS. Alors Γ vérifie la propriété RD **ssi** l'espace des fonctions à décroissance rapide $H^\infty(\Gamma) = \bigcap_{s>0} H^s(\Gamma)$ est contenu dans $C_r^*(\Gamma)$ [Jol90, Prop. 1.2.6]. Lorsque c'est le cas, on montre que $H^\infty(\Gamma)$ est une sous-$*$-algèbre dense de $C_r^*(\Gamma)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe, et en particulier l'inclusion induit des isomorphismes en K-théorie [Jol89]. Dans [3, Crl. 5.3 et 5.6], nous démontrons l'analogue de ce résultat pour les groupes quantiques discrets qui ont la propriété RD. Remarquons que V. Lafforgue a utilisé ce type de résultat, dans le cas classique, dans sa preuve de la conjecture de Baum-Connes pour les réseaux co-compacts de $SL(3,\mathbb{R})$ [Laf02].

Notons enfin que le résultat du théorème 2.2.1 sera utilisé à deux reprises plus loin dans ce mémoire. Dans [4], nous l'utilisons pour transporter la preuve de la factorialité de $\mathscr{L}(\mathbb{F}O(Q))$ au cadre C^*-algébrique et obtenir la simplicité de $C_r^*(\mathbb{F}O(Q))$, cf le corollaire 2.3.4. Dans [7] la propriété RD est un des arguments nécessaires pour déduire de la trivialité du cocycle chemin l'annulation du premier groupe de cohomologie L^2 de $\mathbb{F}O(Q)$, cf le corollaire 2.3.12. En fait dans les deux cas on utilise une extension de la propriété RD au cas non unimodulaire, qui découle facilement des calculs de [3] : pour $Q\bar{Q} = \pm I_N$ et $x \in \mathbb{C}[\mathbb{F}O(Q)]_n$ on a une estimée *exponentielle* $\|x\|_r \leq \|Q^*Q\|^n P(n)\|x\|_2$.

2. La notion de C^*-algèbre réduite d'un groupe quantique discret est définie à partir de la représentation régulière gauche $\lambda : C_r^*(\mathbb{F}) \to B(\ell^2\mathbb{F})$. On a également une représentation régulière droite $\rho : C_r^*(\mathbb{F}) \to B(\ell^2\mathbb{F})$ qui commute à λ et qui lui est unitairement équivalente. On note $(\lambda,\rho) : C_r^*(\mathbb{F}) \otimes_{\max} C_r^*(\mathbb{F}) \to B(\ell^2\mathbb{F})$ la représentation associée du produit tensoriel maximal, appelée *représentation droite-gauche* de $\mathbb{F}$. L'image de (λ,ρ) est une C^*-algèbre intéressante, qui a été étudiée par Akemann et Ostrand dans le cas du groupe libre usuel $\mathbb{F} = F_2$: ils montrent notamment que $\mathrm{Im}(\lambda,\rho)$ contient $K(\ell^2(F_2))$ comme unique idéal non trivial [AO75, Thm. 2]. En fait, notant $\pi : B(\ell^2(F_2)) \to B(\ell^2(F_2))/K(\ell^2(F_2))$ l'application quotient, ils montrent que $\pi \circ (\lambda,\rho)$ se factorise à travers le produit tensoriel minimal $C_r^*(F_2) \otimes C_r^*(F_2)$, et concluent par simplicité de $C_r^*(F_2)$ [Pow75].

On dit alors qu'un groupe quantique discret $\mathbb{F}$ a la *propriété AO* si $\pi \circ (\lambda,\rho)$ se factorise à travers le produit tensoriel minimal $C_r^*(\mathbb{F}) \otimes C_r^*(\mathbb{F})$. Remarquons que cette propriété peut être vue comme un affaiblissement de la moyennabilité : en effet, si $\mathbb{F}$ est moyennable, $C^*_r(\mathbb{F})$ est nucléaire donc les produit tensoriels maximal et réduit de $C^*_r(\mathbb{F})$ par elle-même sont identiques. Par ailleurs, si $\mathbb{F}$ est unimodulaire, la *représentation adjointe* $(\lambda,\rho)\circ\Delta$: $C^*_{\max}(\mathbb{F})\to B(\ell^2(\mathbb{F}))$ admet le vecteur cyclique canonique ξ_0 comme vecteur fixe, et donc si (λ,ρ) se factorise à travers $C^*_r(\mathbb{F})\otimes C^*_r(\mathbb{F})$, sans composer par π, on en déduit que la représentation triviale se factorise à travers $C^*_r(\mathbb{F})$, donc $\mathbb{F}$ est moyennable.

Skandalis montre dans [Ska88, Thm. 4.4] que les sous-groupes discrets Γ des groupes de Lie connexes simples G de rang 1 ont la propriété AO, ce qui fournit de nombreux exemples comme les réseaux de $SU(n,1)$ et $Sp(n,1)$. La preuve généralise celle de Akemann et Ostrand pour le groupe libre et repose sur le fait que l'espace symétrique associé à G est à courbure négative. Un autre type de preuve exploite le fait que l'action de Γ sur une compactification $\bar{\Gamma}$ « petite à l'infini » est moyennable [HG04, Lemma 5.2] : ainsi tous les groupes hyperboliques au sens de Gromov ont la propriété AO car leur action sur la frontière de Gromov $\partial\Gamma$ est moyennable [Ada94, Thm. 5.1] [ADR00]. Plus généralement, on dit que Γ est *bi-exact* si l'action « droite-gauche » de $\Gamma\times\Gamma$ sur le spectre de $\ell^\infty(\Gamma)/c_0(\Gamma)$ est moyennable. Ozawa montre alors que Γ est bi-exact **ssi** Γ est exact et vérifie la propriété « AO$^+$ » suivante, qui implique clairement la propriété AO : il existe une factorisation « modulo les compacts » et UCP de (λ,ρ) à travers $C^*_r(\Gamma)\otimes C^*_r(\Gamma)$ [BO08, Lem. 15.1.4, Prop. 15.2.3].

Depuis l'article [AO75], la propriété AO a connu plusieurs autres applications. Ainsi Skandalis montre que si un groupe infini Γ a la propriété (T) de Kazhdan et la propriété AO, alors $C^*_r(\Gamma)$ n'est pas K-nucléaire : cela s'applique par exemple aux réseaux de $Sp(n,1)$ [Ska88, Crl. 4.5]. Il montre également que si Γ est non-moyennable, ICC et a la propriété AO alors $\mathrm{Im}(\lambda,\rho)$ contient $K(\ell^2(\Gamma))$, en particulier $\mathscr{L}(\Gamma)$ est plein [Ska88, Crl. 4.5]. Par ailleurs Ozawa montre que si le groupe Γ est exact et a la propriété AO, alors l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\Gamma)$ est *solide* [Oza04], ce qui fournit de nombreux exemples de facteurs *premiers* — cf aussi la section 2.3.

Dans [2], je démontre la propriété AO pour les groupes quantiques libres $\mathbb{F}$ en suivant la méthode d'Akemann et Ostrand. Plus précisément, on construit une isométrie $F:\ell^2(\mathbb{F})\to\ell^2(\mathbb{F})\otimes\ell^2(\mathbb{F})$ telle que $F^*(\lambda\otimes\rho)(x)F=(\lambda,\rho)(x) \mod K(\ell^2(\mathbb{F}))$ pour tout $x\in C^*_r(\mathbb{F})\otimes_{\max}C^*_r(\mathbb{F})$, ce qui démontre la propriété AO$^+$ pour $\mathbb{F}$. Dans le cas $\mathbb{F}=F_N$, l'isométrie utilisée par Akemann et Ostrand est la partie polaire de l'application $F_0:\ell^2(F_N)\to\ell^2(F_N)\otimes\ell^2(F_N)$ donnée par $F_0^*(\mathbb{1}_g\otimes\mathbb{1}_h)=\mathbb{1}_{gh}$ si $l(gh)=l(g)+l(h)$, et $F^*(\mathbb{1}_g\otimes\mathbb{1}_h)=0$ sinon, où l est la longueur des mots réduits.

Dans le cas d'un groupe quantique libre $\mathbb{F}$, on construit un analogue de F_0 en utilisant les projecteurs $p_n\in B(\ell^2(\mathbb{F}))$ associés aux sphères dans le graphe de Cayley classique. Soit $B:\ell^2(\mathbb{F})\otimes\ell^2(\mathbb{F})\to\ell^2(\mathbb{F})$ l'application densément définie donnée par $B(\Lambda(x)\otimes\Lambda(y))=\Lambda(xy)$, on pose

$$F_0^*=\textstyle\sum_{k,l}p_{k+l}B(p_k\otimes p_l).$$

Notons que B s'interprète comme l'opérateur « but » du graphe de Cayley quantique *complet* de $\mathbb{F}$, c'est-à-dire associé à l'ensemble générateur $D=\mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$. On a en fait $F_0^*=BP_{\star+}$, où $P_{\star+}$ est un analogue pour le graphe complet du projecteur d'orientation ascendante $p_{\star+}$ considéré à la section 1.2 : ainsi F_0^* s'interprète comme une variante de l'opérateur de Julg-Valette. En utilisant le même genre de techniques que pour la proposition 2.1.4, on démontre :

Théorème 2.2.3 [2, Thm. 8.3] *Soit $\mathbb{F}$ un groupe quantique libre. On suppose que les dimensions quantiques des générateurs canoniques de $\operatorname{Irr}\mathbb{F}$ sont différentes de 2. Soit $F : \ell^2(\mathbb{F}) \to \ell^2(\mathbb{F})\otimes\ell^2(\mathbb{F})$ la partie polaire de $F_0 = (BP_{\star+})^*$. Alors on a $F^*(\lambda\otimes\rho)(x)F = (\lambda,\rho)(x) \bmod K(\ell^2(\mathbb{F}))$ pour tout $x \in C_r^*(\mathbb{F})\otimes_{\max}C_r^*(\mathbb{F})$. En particulier $\mathbb{F}$ vérifie la propriété AO^+.*

Remarquons que pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, l'hypothèse $\operatorname{qdim} r_1 \neq 2$ revient à exclure les cas des duaux de $SU_{\pm1}(2)$, mais dans ces deux cas $\mathbb{F}$ est moyennable donc la propriété AO est évidente. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(Q)$, le seul cas non moyennable qui n'est pas couvert par le théorème est celui de $\mathbb{F}U_2$. Dans [4], nous donnons une autre preuve de la propriété AO, dans le cas orthogonal, en utilisant la moyennabilité de l'action de $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ sur la frontière de Gromov $\partial\mathbb{F}$: cette approche est détaillée dans la suite de cette section. Elle s'applique également au cas unitaire [VVV10, Thm. 5.1], toujours en excluant le cas de $\mathbb{F}U_2$.

Problème 2.2.4 Montrer que le groupe quantique discret $\mathbb{F}U_2$ vérifie la propriété AO. □

3. Une autre propriété classique plus faible que la moyennabilité est l'*exactitude* : on dit que le groupe quantique discret $\mathbb{F}$ est exact si sa C^*-algèbre réduite $C_r^*(\mathbb{F})$ est exacte, c'est-à-dire que le foncteur $A \mapsto A\otimes C_r^*(\mathbb{F})$ est exact. On montre que cela équivaut à l'exactitude du foncteur $A \mapsto A \rtimes_r \mathbb{F}$. Notons que le foncteur $A \mapsto A\otimes_{\max}C_r^*(\mathbb{F})$ est toujours exact, de sorte qu'un groupe quantique discret moyennable est exact, car sa C^*-algèbre réduite est nucléaire. Il est en fait extrêmement difficile de construire un groupe discret non-exact [KW99, Gro03, AD11].

On a des caractérisations de la nucléarité et de l'exactitude en termes de propriétés d'approximation. Ainsi, une C^*-algèbre unifère séparable C est *nucléaire* **ssi** il existe des applications UCP $\varphi_n : C \to M_{k(n)}(\mathbb{C})$, $\psi_n : M_{k(n)}(\mathbb{C}) \to C$ telles que $\|\psi_n \circ \varphi_n(c) - c\|_C \to_n 0$ pour tout $c \in C$. De même, C est *exacte* **ssi** il existe une représentation fidèle $C \subset B(H)$ et des applications UCP $\varphi_n : C \to M_{k(n)}(\mathbb{C})$, $\psi_n : M_{k(n)}(\mathbb{C}) \to B(H)$ telles que $\|\psi_n \circ \varphi_n(c) - c\|_{B(H)} \to_n 0$ pour tout $c \in C$. Ces caractérisations (dont l'équivalence avec les propriétés des produits tensoriels est non-triviale) impliquent clairement l'exactitude des sous-C^*-algèbres de C^*-algèbres nucléaires ou exactes.

Soit Γ un groupe discret agissant sur un espace compact X. On dit que l'action est *moyennable* s'il existe des applications continues $\xi_n : X \to \ell^2(\Gamma)$ telles que $\sup_x(\|\xi_n(x)\|_2 - 1) \to_n 0$ et $\sup_x \|\lambda(g)\xi_n(x) - \xi_n(g\cdot x)\|_2 \to_n 0$ pour tout g. Dans ce cas, on montre que la C^*-algèbre $C(X) \rtimes_r \Gamma$ est nucléaire, et comme elle contient $C_r^*(\Gamma)$, il s'ensuit que Γ est exact. En fait la réciproque est vraie : si le groupe discret Γ est exact, il admet une action moyennable sur un espace compact — par exemple l'action naturelle sur le compactifié de Stone-Čech est moyennable. L'exemple type d'une action moyennable est l'action naturelle de $\Gamma = F_N$, ou plus généralement d'un groupe hyperbolique, sur la frontière de Gromov ∂F_N : pour un mot réduit infini $x \in \partial F_N$ et un mot réduit fini $g \in F_N$, on peut prendre $\xi_n(x,g) = 1$ si x commence par g, $\xi_n(x,g) = 0$ sinon.

Remarquons que les applications ξ_n du paragraphe précédent peuvent aussi être considérées comme des applications $\xi_n : \Gamma \to C(X)$. La notion d'action moyennable admet alors des généralisations au cas où $A = C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre non nécessairement commutative, cf [AD87] et [BO08, Section 4.3], de manière à avoir la nucléarité du produit croisé $A \rtimes_r \Gamma$ si A est nucléaire. Notons que pour ces généralisations on demande que les éléments $\xi_n(g) \in A$ soient centraux.

Dans [4], nous considérons l'action d'un groupe quantique discret $\mathbb{F}$ sur une C^*-algèbre unifère A. Une telle action est donnée par une coaction $\alpha : A \to M(C_0(\mathbb{F})\otimes A)$, mais on a aussi une action associée de $\mathbb{C}[\mathbb{F}]$ sur A par dualité. Nous disons qu'une telle action est moyennable s'il existe des éléments ξ_n dans le A-module hilbertien $\ell^2(\mathbb{F})\otimes A$ tels que $\xi_n^*\xi_n \to 1$, $(1\otimes x)\xi_n - (x\otimes 1)\xi_n \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}[\mathbb{F}]$ et $(\mathrm{ad}\otimes\mathrm{id})\alpha(a)\xi_n = \xi_n a$ pour tout n et tout $a \in A$ [4, Def. 4.1]. Les deux premières conditions correspondent à la définition classique. Dans la troisième, $\mathrm{ad} : C_0(\mathbb{F}) \to B(\ell^2(\mathbb{F}))$ est la *représentation adjointe* du dual de $\mathbb{F}$, qui est triviale dans le cas où $\mathbb{F} = \Gamma$ est un groupe discret usuel : dans ce cas la troisième condition équivaut donc au fait que $\xi_n : \Gamma \to A$ est à valeurs dans le centre.

Comme dans le cas classique, nous montrons que si l'action de $\mathbb{F}$ sur A est moyennable, on a $A \rtimes_r \mathbb{F} \simeq A \rtimes_p \mathbb{F}$, et ce produit croisé est nucléaire si c'est le cas de A [4, Prop. 4.4]. En particulier, si $\mathbb{F}$ admet une action moyennable sur une C^*-algèbre unifère nucléaire, alors $\mathbb{F}$ est exact.

On peut alors montrer l'exactitude des groupes quantiques libres orthogonaux $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ en utilisant leur action naturelle sur la frontière de Gromov $\partial\mathbb{F}$ construite à la section 1.3. En effet, $C(\partial\mathbb{F})$ est clairement nucléaire comme limite inductive UCP d'algèbres de matrices. Il reste donc à montrer la moyennabilité de l'action : on procède en s'inspirant de l'exemple des groupes libres usuels F_N.

Théorème 2.2.5 [4, Thm. 4.5] *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N > 1$, non isomorphe aux duaux de $SU_{\pm1}(2)$. Alors l'action de $\mathbb{F}$ sur $\partial\mathbb{F}$ construite à la proposition 1.3.2 est moyennable. En particulier $\mathbb{F}$ est exact.*

Ce résultat permet également de retrouver la propriété AO pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$. En effet on a par définition un $*$-homomorphisme injectif $f : C(\partial\mathbb{F}) \to C_b(\mathbb{F})/C_0(\mathbb{F}) \subset C := B(\ell^2\mathbb{F})/K(\ell^2\mathbb{F})$, qui est compatible avec $\pi\circ(\lambda,\rho) : C_r^*(\mathbb{F})\otimes_{\max}C_r^*(\mathbb{F}) \to C$ de la manière suivante. D'après la proposition 1.3.2, $\rho(C_r^*(\mathbb{F}))$ commute à $f(C(\partial\mathbb{F}))$, tandis que f est équivariante relativement à l'action de $\mathbb{F}$ sur $C(\partial\mathbb{F})$ associée à δ_l, et à l'action adjointe sur C induite par la représentation régulière λ. Ainsi $\pi\circ(\lambda,\rho)$ s'étend en un $*$-homomorphisme $(f,\lambda,\rho) : (C(\partial\mathbb{F})\rtimes_p\mathbb{F})\otimes_{\max}C_r^*(\mathbb{F}) \to C$. Mais comme l'action est moyennable, $C(\partial\mathbb{F})\rtimes_p\mathbb{F} = C(\partial\mathbb{F})\rtimes_r\mathbb{F}$ est nucléaire, donc (f,λ,ρ) se factorise à travers le produit tensoriel minimal, et on obtient la propriété AO.

Dans [4], nous donnons une autre preuve de l'exactitude de $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ en utilisant l'équivalence monoïdale entre $\mathbb{F}O(Q)$ et le dual $\hat{\mathbb{G}}_q$ d'un groupe $SU_q(2)$, pour $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 2$. En effet, à cette équivalence monoïdale est associée une C^*-algèbre B munies d'actions ergodiques de $\mathbb{F}O(Q)$ et $\hat{\mathbb{G}}_q$ qui commutent. De plus, on a $C_r^*(\mathbb{F}O(Q))$, $C_r^*(\hat{\mathbb{G}}_q) \subset B\otimes B^{\mathrm{op}}$ et $B\otimes K(H) \simeq B\rtimes_r\mathbb{G}\rtimes_r\mathbb{F} \simeq K(H)\rtimes_r\mathbb{F}$, donc $\mathbb{F}O(Q)$ est exact **ssi** B est exacte **ssi** $\hat{\mathbb{G}}_q$ est exact, ce qui est le cas car $\hat{\mathbb{G}}_q$ est moyennable. On en déduit aussi que les groupes quantiques $\mathbb{F}U(Q)$, $Q \in GL_N(\mathbb{C})$ sont exacts : en effet à équivalence monoïdale près on peut toujours supposer que $Q\bar{Q} = \pm I_N$ [BDRV06, Cor. 6.3], et on a alors $C_r^*(\mathbb{F}U(Q)) \subset C_r^*(\mathbb{Z}) *_r C_r^*(\mathbb{F}O(Q))$ [Ban97, Thm. 1 (iv)].

D'autres propriétés d'approximation pour $\mathbb{F}O(Q)$ on été étudiées depuis [4]. Comme on l'a déjà mentionné dans les sections précédentes, Brannan démontre ainsi la *propriété de Haagerup* pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}O_N$, en utilisant des états sur la sous-C^*-algèbre *centrale* $\overline{\mathrm{Vect}}\{\chi_v \mid v \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}\} \subset C_p^*(\mathbb{F})$ [Bra12a, Thm. 4.5]. Plus précisément, il existe des applications UCP $\varphi_n : C_r^*(\mathbb{F}) \to C_r^*(\mathbb{F})$ qui induisent des opérateurs compacts sur $\ell^2(\mathbb{F})$ et approximent l'identité au sens où $\|\varphi_n(x) - x\| \to 0$ pour tout $x \in C_r^*(\mathbb{F})$. Dans le cas classique, la moyennabilité de $\mathbb{F} = \Gamma$ correspond aux cas où les applications φ_n peuvent être choisies de rang fini.

Brannan montre également la propriété de Haagerup pour $\mathbb{F}U_N$ [Bra12a, Crl. 4.9] et pour le dual de $Aut^+(\mathbb{X})$, où $C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre de dimension finie munie de sa trace de Markov [Bra12c, Thm. 4.2] — donc en particulier pour le dual de S_N^+. Récemment, Lemeux a également montré la propriété de Haagerup pour les duaux des groupes de réflexions complexes quantiques H_N^{s+} considérés dans la section 1.1 [Lem12]. En tenant compte de l'isomorphisme $C(H_N^{s+}) \simeq C^*(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}) *_w A_s(N)$ démontré à la proposition 1.1.9, ce résultat et celui de Brannan concernant S_N^+ amènent la question suivante :

Problème 2.2.6 Soit Γ un groupe discret usuel vérifiant la propriété de Haagerup. Montrer que le groupe quantique discret associé à $C^*(\Gamma) *_w A_s(N)$ a la propriété de Haagerup. □

Par ailleurs, Freslon a récemment démontré la *propriété d'approximation complètement bornée* (CBAP) pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O_N$, $\mathbb{F}U_N$ [Fre12], en utilisant la propriété de Haagerup et des estimées sur la norme CB des projections naturelles $C_r^*(\mathbb{\Gamma}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]_v$, pour $v \in \operatorname{Irr} \mathbb{\Gamma}$. Plus précisément, il existe des applications CB $\varphi_n : C_r^*(\mathbb{\Gamma}) \to C_r^*(\mathbb{\Gamma})$ de rang fini, telles que $\|\varphi_n\|_{cb} \to 1$ et $\|\varphi_n(x) - x\| \to 0$ pour tout $x \in C_r^*(\mathbb{\Gamma})$ — on dit aussi que $\mathbb{\Gamma}$ est *faiblement moyennable* avec constante $\Lambda = 1$. On retrouve en particulier l'exactitude de $C_r^*(\mathbb{\Gamma})$: en effet, l'existence des applications φ_n précédentes permet facilement de vérifier l'exactitude du foncteur $A \mapsto A \otimes C_r^*(\mathbb{\Gamma})$. Dans le cas classique, la moyennabilité de $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$ correspond aux cas où les applications φ_n peuvent être choisies complètement positives.

2.3 Propriétés von Neumann

Cette section concerne l'étude de l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = C_r^*(\mathbb{\Gamma})'' \subset B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$, et de la « cohomologie L^2 » de $\mathbb{\Gamma}$, qui est un invariant de $\mathbb{\Gamma}$ construit à partir de $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$. Nous présentons notamment les résultats obtenus dans [4, 7].

1. On commence par montrer que $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est un facteur, c'est-à-dire que $Z(\mathscr{L}\mathbb{\Gamma}) = \mathbb{C}1$, et par déterminer son type. Dans le cas d'un groupe usuel $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$, cela équivaut au fait que Γ est *ICC*, c'est-à-dire que ses classes de conjugaison sont infinies (sauf celle de l'unité). Dans le cas quantique, on n'a pas de critère analogue et on procède autrement.

Soit $\mathbb{\Gamma}$ un groupe quantique discret et $v_i \in L(H_i) \otimes C_r^*(\mathbb{\Gamma})$ un nombre fini de coreprésentations irréductibles qui engendrent $\operatorname{Corep} \mathbb{\Gamma}$. On note $\xi_0 \in \ell^2(\mathbb{\Gamma})$ le vecteur cyclique canonique pour la représentation régulière gauche de $\mathbb{\Gamma}$, et on munit $K = \bigoplus L(H_i)$ de la structure hilbertienne induite par le poids de Haar à gauche sur $C_0(\mathbb{\Gamma}) \simeq \bigoplus_{v \in \operatorname{Irr}\mathbb{\Gamma}} L(H_v)$. On considère l'opérateur $T : \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \to K \otimes \ell^2(\mathbb{\Gamma})$, $x\xi_0 \mapsto \sum [v_i, 1 \otimes x](1 \otimes \xi_0)$ — dans le cas classique $\mathbb{\Gamma} = \Gamma$, T encode les commutateurs avec les générateurs de Γ. Il est clair que si $\operatorname{Ker} T = \mathbb{C}\xi_0$, alors $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est un facteur. Dans [4, Section 7] nous étudions l'opérateur T pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$, muni du générateur canonique v_1 de $\operatorname{Corep} \mathbb{\Gamma}$. Plus précisément nous montrons, sous une hypothèse technique pour la matrice Q, une propriété de *trou spectral* : il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T\xi\| \geq C\|\xi\|$ si $\xi \perp \xi_0$. Cela implique clairement que les suites centrales sont triviales, donc que $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est un facteur plein.

Lorsque $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ est unimodulaire, c'est-à-dire que l'état de Haar h sur $C^*(\mathbb{\Gamma})$ est une trace, le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est de type II_1. Lorsque h n'est pas tracial, ses propriétés modulaires sont décrites par des opérateurs positifs $F_k \in L(H_k)$ tels que $\operatorname{Tr} F_k = \operatorname{Tr} F_k^{-1}$, où $v_k \in L(H_k) \otimes C_r^*(\mathbb{\Gamma})$ est la k^{e} coreprésentation irréductible de $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$: on a plus précisément $(\mathrm{id} \otimes \sigma_t^h)(v_k) = (F_k^{it} \otimes 1) v_k (F_k^{it} \otimes 1)$. En particulier on voit que h est presque périodique. Notons de plus que F_k est équivalente à $p_k F_1^{\otimes k} p_k$ si $p_k \in L(H_1^{\otimes k})$ est le projecteur sur le sous-espace isomorphe à H_k, et que $F_1 = Q^*Q$ lorsque $Q\bar{Q} = \pm I_N$. On étudie alors σ_t^h à l'aide d'une déformation de l'opérateur T. Le lemme suivant contient comme cas particulier la propriété spectrale de T mentionnée ci-dessus :

Lemme 2.3.1 *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$ telle que $\|Q\|^2 \leq \mathrm{Tr}(Q^*Q)/\sqrt{5}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on considère $T_t : \ell^2(\mathbb{F}) \to L(\mathbb{C}^N)\otimes\ell^2(\mathbb{F})$ donné par $T_t(x\xi_0) = (\mathrm{id}\otimes\sigma_t^h)(u)(1\otimes x\xi_0) - (1\otimes x)u(1\otimes\xi_0)$, où $u \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$ est la coreprésentation fondamentale. Alors on a, pour tout $\xi\perp\xi_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\|T_t(\xi + \lambda\xi_0)\| = \sqrt{C_1^2\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 D_t} - C_2\|\xi\|,$$

avec $C_1 > C_2 > 0$ et $D_t = 2 - 2|\,\mathrm{Tr}(F_1^{it-1})/\,\mathrm{Tr}(F_1^{-1})|^2$.

Notons que l'hypothèse technique sur Q signifie, pour $N \geq 3$, que Q n'est pas trop éloignée d'une matrice unitaire, donc que $\mathbb{F}O(Q)$ n'est pas « trop loin du cas unimodulaire ». La preuve du lemme n'est pas significativement plus facile dans le cas $t = 0$, elle repose sur des calculs dans la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}$. On montre par exemple (dans le cas unimodulaire) que

$$\|p_{k+1}^l \Sigma p_{k+1}^r\| \leq \frac{\mathrm{qdim}(v_k) + 1}{\mathrm{qdim}(v_{k+1})} < 1,$$

où $p_{k+1}^l \in L(H_1\otimes H_k)$, $p_{k+1}^r \in L(H_k\otimes H_1)$ sont les projections orthogonales sur les sous-espaces équivalents à H_{k+1}, et $\Sigma : H_k\otimes H_1 \to H_1\otimes H_k$ est la volte usuelle [4, Lem. 7.11, cas unimodulaire]. Cela s'interprète en disant que Σ est « loin d'être un morphisme » dans la catégorie $\mathrm{Corep}\,\mathbb{F}$.

On note $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes d'une algèbre de von Neumann M, qui est muni de la u-topologie induite par les semi-normes $\|\omega \circ \cdot\|$, $\omega \in M_*$. On considère le sous-groupe $\mathrm{Int}(M) = \{\mathrm{Ad}(u) | u \in M, u^*u = uu^* = 1\}$ des automorphismes intérieurs, et $\mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\,\mathrm{Int}(M)$. Le fait que M est pleine équivaut au fait que $\mathrm{Int}(M)$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(M)$ [Con74, Def. 3.5]. On déduit du lemme que pour $M = \mathscr{L}(\mathbb{F}) = \mathscr{L}(\mathbb{F}O(Q))$:

$$\begin{aligned} \sigma_{t_n}^h \to \mathrm{id} \in \mathrm{Out}(M) \ &\Leftrightarrow\ \mathrm{Tr}(F_1^{it_n-1}) \to \mathrm{Tr}(F_1^{-1}) \\ &\Leftrightarrow\ \forall r, s \in \mathrm{Sp}(F_1)\ \ (r/s)^{it_n} \to 1 \ \Leftrightarrow\ \sigma_{t_n}^h \to \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(M). \end{aligned}$$

Cela calcule l'invariant τ du facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F})$ et, comme $\mathscr{L}(\mathbb{F})$ est plein, son invariant Sd [Con74, Sec. 4]. On en déduit notamment le type de $\mathscr{L}(\mathbb{F})$:

Théorème 2.3.2 [4, Thm. 7.1] *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$, telle que $\|Q\|^2 \leq \mathrm{Tr}(Q^*Q)/\sqrt{5}$. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ le sous-groupe engendré par $\mathrm{Sp}(F_1\otimes F_1^{-1})$, où $F_1 = Q^*Q$. Alors $\mathscr{L}\mathbb{F}$ est un facteur plein et $\mathrm{Sd}(\mathscr{L}\mathbb{F}) = \Lambda$. En particulier $\mathscr{L}\mathbb{F}$ est de type II_1 si $F_1 = I_N$, de type III_λ si $\Lambda = \lambda^{\mathbb{Z}}$, et de type III_1 dans les autres cas.*

Notons que pour $N = 2$ l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathbb{F}O(Q)) = L^\infty(SU_q(2))$ n'est pas un facteur. Un résultat de factorialité similaire au théorème 2.3.2 a été obtenu par Brannan dans le cas des duaux $\mathbb{F}$ des groupes d'automorphismes quantiques $\mathbb{G} = Aut^+(\mathbb{X})$, où $C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre de dimension finie munie de sa trace de Markov. Plus précisément il montre, sous l'hypothèse technique $\dim C(\mathbb{X}) \geq 8$, que $\mathscr{L}\mathbb{F}$ est un facteur plein de type II_1 [Bra12c, Thm. 5.1], ce qui inclut le cas des duaux des groupes de permutations quantiques S_N^+, $N \geq 8$.

Problème 2.3.3 Montrer que les résultats du théorème 2.3.2 restent valables pour toute matrice Q telle que $Q\bar{Q} = \pm I_N$. □

En combinant les arguments utilisés pour la preuve du théorème 2.3.2 et la propriété RD, cf section 2.2.1, on parvient également à montrer la simplicité de $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$. Plus précisément, T induit un opérateur $P : C^*_r(\mathbb{\Gamma}) \to C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ donné par $P(x)\xi_0 = (\mathrm{id} - \frac{1}{2}T^*T)(x\xi_0)$, dont il est facile de donner une expression explicite en termes de multiplications par les générateurs de $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$. Le lemme 2.3.1, dans le cas $t = 0$, montre qu'il existe une constante $0 < C < 1$ telle que $\|P(x)\xi_0\| \leq C\|x\xi_0\|$ pour tout $x \in C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ tel que $h(x) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]_n \subset C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ on a $P^k(x) \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]_{n+2k}$ et en appliquant la propriété RD on obtient, dans le cas unimodulaire : $\|P^k(x)\| \leq C^k P(n + 2k)\|x\|$ si $h(x) = 0$. Cela montre que $P^k(x) \to h(x)1$, donc que x ne peut pas appartenir à un idéal non trivial, pour tout $x \in C^*_r(\mathbb{\Gamma})$. De plus si ϕ est une trace sur $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ on a $\phi \circ P = \phi$, et on obtient donc $\phi = h$.

Dans le cas non unimodulaire, on a une version « non polynômiale » de la propriété RD : $\|x\| \leq P(n)\|F_1\|^n\|x\xi_0\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]_n$, qui s'obtient en effectuant les modifications évidentes dans la preuve du théorème 2.2.1. En utilisant une estimée explicite pour C qui donne $C\|F_1\|^2 < 1$ modulo un renforcement de l'hypothèse technique sur Q, on obtient :

Corollaire 2.3.4 [4, Thm. 7.2] *Soit $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$, telle que $\|Q\|^8 \leq 3\,\mathrm{Tr}(Q^*Q)/8$. Alors la C^*-algèbre $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ est simple, et l'état de Haar h est l'unique état sur $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ vérifiant la condition KMS relativement à σ^h_t.*

Dans le cas $\mathbb{\Gamma} = \Gamma = F_N$, la simplicité de $C^*_r(\Gamma)$ et l'unicité de la trace sont dues à Powers [Pow75]. Banica a démontré l'analogue du corollaire ci-dessus pour $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}U(Q)$ en utilisant la combinatoire « libre » des règles de fusion de $\mathbb{F}U(Q)$ [Ban97, Thm. 3], méthode qui ne s'applique pas à $\mathbb{F}O(Q)$ dont les règles de fusion sont commutatives. Enfin Brannan a montré la simplicité et l'unicité de la trace de $C^*_r(\mathbb{\Gamma})$ lorsque $\mathbb{\Gamma}$ est le dual de $Aut^+(B)$ avec $\dim B \geq 8$ [Bra12c, Cor. 5.12], ce qui inclut $C^*_r(\mathbb{\Gamma}) = C_r(S^+_N)$ pour $N \geq 8$. Comme $C_p(H^{s+}_N)$ est un quotient de $C^*_p(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^{*N} * C_p(S^+_N)$ avec « peu de relations », il est naturel de poser la question suivante, pour laquelle on pourrait utiliser la méthode de Banica :

Question 2.3.5 La C^*-algèbre réduite (resp. l'algèbre de von Neumann) associée au dual du groupe de réflexions complexes quantique H^{s+}_N est-elle simple (resp. un facteur) ? □

2. Étant donné un facteur M de type II_1, il est naturel de se demander si M peut se décomposer en un produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ avec M_1, M_2 de type II_1. Lorsque c'est impossible, on dit que M est un *facteur premier* : c'est par exemple de cas de $\mathscr{L}(\Gamma)$ pour $\Gamma = F_D$, D non dénombrable [Pop83, Crl. 6.6], pour $\Gamma = F_N$ [Ge98, Thm. 3.3], et plus généralement pour Γ hyperbolique [Oza04, Thm. 1]. En particulier les réseaux dans $Sp(n, 1)$ fournissent une infinité de facteurs premiers de type II_1, à prédual séparable, deux-à-deux non isomorphes. L'approche de Ge repose sur la notion d'entropie libre, tandis que celle d'Ozawa utilise la propriété AO.

Rappelons qu'une algèbre de von Neumann M est dite *diffuse* si elle ne contient pas de projection minimale, et *injective* s'il existe une représentation normale fidèle $M \subset B(H)$ et une projection $E : B(H) \to M$ de norme 1. On dit qu'une algèbre de von Neumann finie M est *solide* si pour toute sous-algèbre de von Neumann diffuse $P \subset M$, le commutant $P' \cap M$ est injectif (et on peut se contenter de considérer les sous-algèbres P diffuses et commutatives). Il est clair que la solidité d'un facteur non injectif de type II_1 implique sa primalité, et Ozawa montre que pour tout groupe ICC hyperbolique Γ, l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\Gamma)$ est solide. La preuve n'utilise que les propriétés suivantes de la sous-C^*-algèbre préfaiblement dense $C = C^*_r(\Gamma) \subset \mathscr{L}(\Gamma)$: C est *localement réflexive*, et $(\lambda, \rho) : C \otimes_{\mathrm{alg}} C \to B(\ell^2\Gamma)/K(\ell^2\Gamma)$ est bornée pour la norme du produit tensoriel minimal. La première propriété est vérifiée en particulier par les C^*-algèbre exactes (cf section 2.2.3), et la seconde correspond à la propriété AO (cf section 2.2.2).

Au vu des résultats de la section 2.2, il est clair que le résultat d'Ozawa s'applique aux groupes quantiques $\mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$, lorsque le facteur associé est de type II_1. En fait la notion de solidité et son application à la primalité s'étendent au cas non fini en ajoutant la condition que la sous-algèbre diffuse $P \subset M$ doit être l'image d'une espérance conditionnelle normale fidèle $E : M \to P$ (ce qui est automatique dans le cas fini). Le résultat suivant, qui résulte immédiatement du résultat d'Ozawa et des théorèmes 2.2.3 et 2.2.5, a donné les premiers exemples connus de facteurs solides de type III :

Théorème 2.3.6 [4, Thm. 7.1] *Soit $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$, telle que $\|Q\| \leq \mathrm{Tr}(Q)/\sqrt{5}$. Alors $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est un facteur solide. En particulier M est premier : on ne peut pas écrire $M = M_1 \bar{\otimes} M_2$ avec M_1, M_2 de type II ou III.*

On peut renforcer la notion de solidité comme suit. On dit qu'une algèbre de von Neumann finie M est *fortement solide* si pour toute sous-algèbre de von Neumann $P \subset M$ injective et diffuse, le normalisateur $\mathcal{N}_M(P) = \{u \in M \text{ unitaire} \mid u^*Pu = P\}$ engendre une sous-algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_M(P)''$ injective. Comme $P' \cap M \subset \mathcal{N}_M(P)''$, il est clair qu'un facteur fini non injectif et fortement solide est solide, premier, mais également qu'il n'a pas de sous-algèbre de Cartan, c'est-à-dire de sous-algèbre abélienne maximale $A \subset M$ telle que $\mathcal{N}_M(A)'' = M$. Les facteurs de groupes libres $M = \mathscr{L}(F_N)$ sont des exemples de facteurs finis sans sous-algèbre de Cartan, cf [Pop83, Crl. 6.5] et [Voi96, Thm. 5.2], et Ozawa et Popa ont montré qu'ils sont en fait fortement solides [OP10, Crl. 4.2].

La preuve de la solidité forte dans [OP10] repose sur la moyennabilité faible de F_N via le théorème de « compacité faible » [OP10, Thm. 3.5], et sur l'existence d'une « déformation » de M au sens suivant [OP10, Prop. 4.8] : il existe une inclusion traciale $M \subset \tilde{M}$ telle que le M,M-bimodule $L^2(\tilde{M}) \ominus L^2(M)$ est faiblement contenu dans le bimodule régulier, et un groupe $(\alpha_t)_t$ d'automorphismes de $\tilde{M}$ préservant la trace, tels que $\|\alpha_t(x) - x\|_2 \to 0$ pour tout $x \in M$ et $E_M \circ \alpha_t : M \to M$ induit un opérateur compact sur $L^2(M)$ pour t assez petit.

Cette preuve s'adapte au cas des groupes quantiques libres orthogonaux $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O_N$, $N \geq 3$. En effet $\mathbb{F}O_N$ est faiblement moyennable [Fre12], cf la section 2.2.3. De plus, on peut construire une déformation « compacte » (α_t) comme ci-dessus, avec $M \subset \tilde{M} = M \bar{\otimes} M$ via le coproduit Δ [Fim11] — en fait $E_M \circ \alpha_t$ redonne la déformation complètement positive de Brannan évoquée dans la section 2.2.3. Finalement la proposition suivante est le dernier ingrédient requis pour obtenir la solidité forte de $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_N)$, et en particulier l'absence de sous-algèbre de Cartan — notons en effet que le M,M-bimodule $L^2(M \bar{\otimes} M)$ correspond à la représentation adjointe de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$.

Proposition 2.3.7 [non publiée, 2011] *Soit $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O_N$, $N \geq 1$. On note ad° la restriction à $\ell^2(\mathbb{\Gamma})^\circ = \xi_0^\perp$ de la représentation adjointe $(\lambda, \rho) \circ \Delta : C_p^*(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$. Alors ad° se factorise à travers $C_r^*(\mathbb{\Gamma})$.*

Comme $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O_N$ est non moyennable pour $N \geq 3$, ce résultat implique une propriété de « trou spectral » au sens de [Pop08, Def. 3.1] : la représentation adjointe sur $\xi_0^\perp \subset \ell^2(\mathbb{\Gamma})$ ne contient pas faiblement la représentation triviale. Cela s'interprète également en disant que $\mathbb{F}O_N$ n'est pas intérieurement moyennable [Eff75], ce qui implique à nouveau que le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_N)$ est plein.

Le résultat de solidité forte d'Ozawa et Popa a été étendu à des classes de groupes très larges, contenant par exemple les groupes hyperboliques : cf [CS11, Thm. B] et [PV12, Thm. 1.5]. La démarche de [PV12] est plus proche de la preuve originale de solidité des groupes hyperboliques [Oza04] que de l'argument précédent. Elle repose sur la bi-exactitude « à la Akemann-Ostrand » et sur le résultat de « compacité faible » de [OP10], et se généralise sans difficulté au cas des groupes quantiques discrets [Iso12]. Comme on sait que $\mathbb{F}O_N$ est faiblement moyennable [Fre12] et bi-exact, cf théorème 2.2.3, on retrouve également la solidité forte de $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_N)$ de cette manière.

3. Lück a donné une définition des *nombres de Betti* L^2 indépendante de tout modèle géométrique et qui ne nécessite pas l'utilisation de groupes d'homologie réduits [Lüc02]. Cette définition s'étend de manière évidente au cas d'un groupe quantique discret *unimodulaire* $\mathbb{\Gamma}$: on considère les groupes d'homologie de Hochshild de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$ à coefficients dans le bimodule $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$, avec action régulière à gauche et triviale à droite, et on pose

$$\beta_k^{(2)}(\mathbb{\Gamma}) = \dim_{\mathscr{L}\mathbb{\Gamma}} H_k(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))$$

où $\dim_{\mathscr{L}\mathbb{\Gamma}}$ est la dimension des $\mathscr{L}\mathbb{\Gamma}$-modules [Lüc98] relativement à l'état de Haar. Thom a montré que l'on pouvait également calculer ces nombres de Betti en utilisant plutôt les groupes de cohomologie $H^k(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))$ [PT11, Thm. 2.2], et nous utilisons cette approche dans [7].

On a en particulier $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})) = \mathrm{Der}(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))/\mathrm{Int}(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))$, où Der est l'espace des dérivations, et Int est le sous-espace des dérivations intérieures. Plus précisément, comme l'action à droite sur $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est triviale, $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}))$ s'interprète comme l'espace des *cocycles* de la représentation régulière sur $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$, c'est-à-dire l'espace des applications linéaires $c : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) \subset \ell^2(\mathbb{\Gamma})$ telles que $c(xy) = \lambda(x)c(y) + c(x)\epsilon(y)$. Il est commode ici d'identifier $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ à un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$ via l'application $x \mapsto x\xi_0$. Les dérivations intérieures correspondent aux cocycles triviaux, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un vecteur $\xi \in M$ tel que $c(x) = \lambda(x)\xi - \xi\epsilon(x)$: on dit alors que ξ est un vecteur fixe pour c.

Dans le cas d'un groupe libre usuel, $\mathbb{\Gamma} = F_N$, on a un cocycle d'origine géométrique à valeurs dans une amplification de $\ell^2(\Gamma)$ et donné par les chemins vers l'origine dans l'arbre de Cayley X : plus précisément, pour $g \in F_N$ on note $c(g)$ la projection sur $\ell^2_\wedge(X^{(1)}) \subset \ell^2(F_N)^{2N}$ de la somme des arêtes le long de l'unique chemin de $g \in X^{(0)}$ vers e. Clairement $\|c(g)\|^2$ est égal à la longueur $l(g)$ du mot réduit g, et en particulier le cocycle c est propre. Cela démontre, via la caractérisation par cocycles [BCV95], la *propriété de Haagerup* pour F_N, la non-annulation du groupe $H^1(F_N, \mathscr{L}(F_N))$, et en fait la non-annulation du premier nombre de Betti ℓ^2 car F_N n'est pas moyennable [BV97, Crl. 2 et 4].

De manière générale, on appelle *cocycle chemin* dans un graphe de Cayley quantique $\mathbb{X}$ associé à un groupe quantique discret $\mathbb{\Gamma}$ tout cocycle $c : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ tel que $B(c(x)) = x\xi_0 - \xi_0\epsilon(x)$ pour tout x, et $c(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]) \subset \ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)})$ [7, Def. 2.5]. Ici $\ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)})$ est un analogue du sous-espace des fonctions à support fini sur l'ensemble des arêtes non orientées : plus précisément, c'est le projeté orthogonal sur $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ du sous-espace dense $\ell^2_f(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]\xi_0 \otimes p_1\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]\xi_0 \subset \ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Notons une subtilité analytique propre au cas quantique : on a dans certains cas $\ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)}) \supsetneq \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \cap \ell^2_f(\mathbb{X}^{(1)})$. L'étude des cocycles chemin se ramène clairement à l'étude de l'opérateur $B : \ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2_f(\mathbb{\Gamma}) = \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]\xi_0$, et notamment de son éventuelle injectivité.

Dans [7] j'étudie les cocycles chemin dans les graphes de Cayley quantiques associés aux groupes quantiques libres $\mathbb{F} = \mathbb{F}U(P_1) * \cdots * \mathbb{F}U(P_k) * \mathbb{F}O(Q_1) * \cdots * \mathbb{F}O(Q_l)$ avec $Q_i\bar{Q}_i = \pm I$. Notons qu'on ne s'attend pas en général à ce que B soit injectif sur $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$: ce n'est déjà pas le cas pour les arbres de Cayley des groupes libres usuels. De même, lorsque B est injectif sur $\ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)})$, on ne s'attend pas à ce que l'inverse soit borné, sinon les cocycles chemin seraient toujours triviaux. De manière surprenante, ces remarques ne s'appliquent pas sur le sous-espace des arêtes « purement quantiques » dans le graphe de Cayley quantique d'un groupe quantique libre $\mathbb{F}$:

Théorème 2.3.8 [7, Prop. 4.1] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$. On suppose que les dimensions quantiques des éléments de D sont différentes de 2. Alors la restriction de l'opérateur but B au sous-espace purement quantique $(1 - Q_0)\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$ est injective à image fermée.*

La preuve de ce théorème repose naturellement sur l'étude de $\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$, et notamment sur le théorème 1.2.10. On utilise également un opérateur dit « de rotation » Φ : $p_{--}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) \to p_{++}\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ associé à la structure de graphe et à l'orientation ascendante, défini par l'équation $(1 - p_0)Bp_{--} = Bp_{++}\Phi$ [7, Lem. 3.2]. Dans le cas classique, cet opérateur associe à une arête descendante de l'arbre l'unique arête ascendante de même but. Pour le sous-espace « quasi-classique » $Q_0\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$, on se ramène à des raisonnements dans le graphe de Cayley classique et on obtient :

Proposition 2.3.9 [7, Prop. 4.1] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique libre $\mathbb{F}$ muni de l'ensemble des générateurs canoniques $D \subset \mathrm{Irr}\,\mathbb{F}$. On suppose que les dimensions quantiques des éléments de D sont différentes de 2. Alors B est injectif sur $Q_0\ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)}) \oplus (1 - Q_0)\ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)})$. En particulier il existe un unique cocycle chemin sur $\mathbb{X}$.*

Il reste à étudier les propriétés métriques des cocycles obtenus. Le théorème 2.3.8 montre que la partie « purement quantique » du cocycle est bornée. Dans le cas orthogonal, $\mathbb{F} = \mathbb{F}O(Q)$ avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, le projecteur quasi-classique Q_0 est égal au projecteur classique q_0, et la fin de l'étude a donc lieu dans le graphe de Cayley classique X, qui est la demi-droite $\mathbb{R}_+$ avec sommets aux entiers. Il est clair que les chemins classiques dans X ne sont pas bornés, cependant à cause des facteurs « dimensionnels » qui apparaissent dans la formule (1), page 23, on se rend compte que la partie classique du cocycle chemin dans $\mathbb{X}$ est également bornée :

Proposition 2.3.10 [7, Thm. 4.4] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à $\mathbb{F}O(Q)$, $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$. Alors $B : \ell^2_\wedge(\mathbb{X}^{(1)}) \to \ell^2(\mathbb{X}^{(0)})$ est inversible. En particulier l'unique cocycle chemin dans $\mathbb{X}$ est trivial.*

Notons que la trivialité d'un cocycle $c : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to H$ équivaut au fait que la « fonction » associée de $\mathbb{\Gamma}$ dans H, c'est-à-dire $C = (\mathrm{id}\otimes c)(V_\mathbb{\Gamma})$, est bornée [7, Prop. 2.3]. Dans les cas où le groupe quantique libre $\mathbb{F}$ n'est pas du type $\mathbb{F}O(Q)$, le sous-espace $q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ est strictement inclus dans $Q_0\ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$ et en étudiant cette différence on parvient à montrer que le cocycle chemin n'est ni borné ni propre [7, Prop. 4.5]. En particulier l'étude des cocycles chemins dans ce cas ne permet pas de montrer la propriété de Haagerup, qui a été obtenue par d'autres moyens par Brannan [Bra12a]. En fait, les résultats cohomologiques qui suivent montrent que la propriété de Haagerup pour $\mathbb{F}O(Q)$ ne peut pas être réalisée par un cocycle à valeurs dans une amplification de la représentation régulière sur $\ell^2(\mathbb{\Gamma})$.

Le fait que le cocycle chemin sur le graphe de Cayley quantique de $\mathbb{F}O(Q)$ soit borné contraste fortement avec la situation des groupes libres usuels. On peut exploiter cette particularité « géométrique » pour démontrer l'annulation du premier groupe de cohomologie L^2. Pour cela on utilise le lemme suivant, qui montre que les cocycles chemin sont « suffisamment universels » parmi les cocycles L^2 :

Lemme 2.3.11 [7, Thm. 5.1] *Soit $\mathbb{X}$ le graphe de Cayley quantique associé à un groupe quantique discret unimodulaire $\mathbb{\Gamma}$ et à un sous-ensemble générateur fini $D \subset \operatorname{Irr} \mathbb{\Gamma}$. On suppose qu'il existe un cocycle chemin $c : \mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}] \to \ell^2_{\wedge f}(\mathbb{X}^{(1)})$ qui admet un vecteur fixe dans $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})\xi_0 \otimes p_1 \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \subset \ell^2(\mathbb{X}^{(1)})$. Alors on a $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})) = 0$.*

On voit que pour obtenir l'annulation de tous les cocycles L^2 on a besoin d'une condition légèrement plus forte que l'annulation du cocycle chemin : en effet dans le cas de $\mathbb{F}O(Q)$ la proposition 2.3.10 montre seulement l'existence d'un vecteur fixe $\xi \in \ell^2(\mathbb{X}^{(1)}) = \ell^2(\mathbb{\Gamma}) \otimes p_1 \ell^2(\mathbb{\Gamma})$. Cependant ξ est explicite, et en utilisant la propriété RD il est facile de vérifier qu'il appartient en fait à $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})\xi_0 \otimes p_1 \ell^2(\mathbb{\Gamma})$. On en déduit :

Corollaire 2.3.12 [7, Crl. 5.2] *Soit $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ un groupe quantique libre orthogonal unimodulaire avec $Q\bar{Q} = \pm I_N$, $N \geq 3$. Alors $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}], \mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})) = 0$. En particulier le premier nombre de Betti $\beta_1^{(2)}(\mathbb{\Gamma})$ est nul.*

Remarquons que dans le cas $N = 2$ le groupe quantique $\mathbb{\Gamma} = \mathbb{F}O(Q)$ est moyennable, de sorte qu'on a annulation de tous les nombres de Betti $\beta_k^{(2)}(\mathbb{\Gamma})$, cf [Lüc98, Thm. 5.1] et [Kye08a, Thm. 6.1]. D'autre part on sait également que $\beta_0^{(2)}(\mathbb{F}O(Q)) = 0$ pour tout N [Kye08b, Crl. 2.3], car $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma})$ est un facteur si $N \geq 3$. Enfin, Collins, Härtel et Thom on construit une résolution libre de longueur 3 de la représentation triviale de $\mathbb{C}[\mathbb{\Gamma}]$, et ils en déduisent que $\beta_k^{(2)}(\mathbb{\Gamma}) = 0$ pour $k \geq 4$ et $\beta_{3-k}^{(2)}(\mathbb{\Gamma}) = \beta_k^{(2)}(\mathbb{\Gamma})$ [CHT09]. Le corollaire 2.3.12 permet donc de conclure que tous les nombres de Betti L^2 de tous les groupes quantiques libres orthogonaux unimodulaires sont nuls — en fait le corollaire constitue la partie *analytique* de ce résultat global.

Rappelons que pour les groupes libres usuels, le seul nombre de Betti L^2 non nul est le premier, et que $\beta_1^{(2)}(F_N) = N-1$ [CG86, Sec. 4]. De ce point de vue, les groupes quantiques libres orthogonaux sont donc plus *rigides* que les groupes libres usuels. Rappelons également que les facteurs de groupes libres ne sont pas *L^2-rigides* au sens de Peterson [Pet09]. Une réponse positive à la question suivante permettrait donc de montrer que les facteurs associés aux groupes quantiques $\mathbb{F}O_N$ ne sont pas isomorphes à des facteurs de groupes libres :

Question 2.3.13 L'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_N)$ est-elle L^2-rigide au sens de Peterson ? □

Soit Γ un groupe de type fini, $\{\gamma_i\}$ un système fini symétrique de générateurs. On pose $X_i = \Re(\gamma_i)$, $Y_i = \Im(\gamma_i) \in \mathscr{L}(\Gamma)$. Connes et Shlyakhtenko montrent que l'entropie libre « sans microstates » $\delta^*(X_i, Y_i)$ vérifie l'inégalité $\delta^*(X_i, Y_i) \leq \beta_1^{(2)}(\Gamma) - \beta_0^{(2)}(\Gamma) + 1$ [CS05, Crl. 4.9]. On peut également considérer l'entropie libre « modifiée » $\delta_0(X_i, Y_i)$, qui vérifie $\delta_0(X_i, Y_i) \leq \delta^*(X_i, Y_i)$ [BCG03]. Si $\mathscr{L}(\Gamma)$ est diffuse et se plonge dans une utrapuissance R^ω du facteur hyperfini de type II_1, on a $1 \leq \delta_0(X_i, Y_i)$ [Jun03, Crl. 4.7]. Tous ces raisonnements s'appliquent également aux groupes quantiques discrets, et on obtient donc $\delta_0(u_{ij}) = \delta^*(u_{ij}) = 1$ pour les générateurs $\{u_{ij}\}$ de $\mathbb{F}O_N$, sous réserve que la réponse à la question suivante soit positive :

Question 2.3.14 Le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_N)$ se plonge-t-il dans une utrapuissance R^ω du facteur hyperfini de type II_1 ? □

Index

Références

[AD87] C. Anantharaman-Delaroche : Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité. *Math. Ann.*, 279(2):297–315, 1987.

[AD11] G. Arzhantzeva et T. Delzant : Examples of random groups. Preprint 2011, 2011.

[Ada94] S. Adams : Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups. *Topology*, 33(4):765–783, 1994.

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault : *Amenable groupoids*, volume 36 de *Monographies de L'Enseignement Mathématique*. L'Enseignement Mathématique, Genève, 2000.

[AFL82] L. Accardi, A. Frigerio et J. T. Lewis : Quantum stochastic processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 18(1):97–133, 1982.

[AO75] C. A. Akemann et P. A. Ostrand : On a tensor product C^*-algebra associated with the free group on two generators. *J. Math. Soc. Japan*, 27(4):589–599, 1975.

[Ban96] T. Banica : Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $\mathrm{O}(n)$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(3):241–244, 1996.

[Ban97] T. Banica : Le groupe quantique compact libre $\mathrm{U}(n)$. *Comm. Math. Phys.*, 190(1):143–172, 1997.

[Ban99a] T. Banica : Representations of compact quantum groups and subfactors. *J. Reine Angew. Math.*, 509:167–198, 1999.

[Ban99b] T. Banica : Symmetries of a generic coaction. *Math. Ann.*, 314(4):763–780, 1999.

[BBC07] T. Banica, J. Bichon et B. Collins : The hyperoctahedral quantum group. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 22(4):345–384, 2007.

[BBCC11] T. Banica, S. T. Belinschi, M. Capitaine et B. Collins : Free Bessel laws. *Canad. J. Math.*, 63(1):3–37, 2011.

[BC00] P. Baum et A. Connes : Geometric K-theory for Lie groups and foliations. *Enseign. Math. (2)*, 46(1-2):3–42, 2000.

[BCG03] P. Biane, M. Capitaine et A. Guionnet : Large deviation bounds for matrix Brownian motion. *Invent. Math.*, 152(2):433–459, 2003.

[BCH94] P. Baum, A. Connes et N. Higson : Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. *In C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, volume 167 de *Contemp. Math.*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[BCV95] M. E. B. Bekka, P.-A. Cherix et A. Valette : Proper affine isometric actions of amenable groups. *In Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993)*, volume 227 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–4. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[BdlH86] E. Bédos et P. de la Harpe : Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2):139–157, 1986.

[BDRV06] J. Bichon, A. De Rijdt et S. Vaes : Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 262(3):703–728, 2006.

[BDV12] J. Bichon et M. Dubois-Violette : Half-commutative orthogonal hopf algebras. Preprint 2012, arXiv:1202.5102, 2012.

[Bia91] P. Biane : Quantum random walk on the dual of $\mathrm{SU}(n)$. *Probab. Theory Related Fields*, 89(1):117–129, 1991.

[Bia92] P. Biane : Minuscule weights and random walks on lattices. *In Quantum probability & related topics*, QP-PQ, VII, pages 51–65. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[Bic04] J. Bichon : Free wreath product by the quantum permutation group. *Algebr. Represent. Theory*, 7(4):343–362, 2004.

[Bla96] É. Blanchard : Déformations de C^*-algèbres de Hopf. *Bull. Soc. Math. France*, 124(1):141–215, 1996.

[BMT03] E. Bédos, G. J. Murphy et L. Tuset : Amenability and co-amenability of algebraic quantum groups. II. *J. Funct. Anal.*, 201(2):303–340, 2003.

[BO08] N. P. Brown et N. Ozawa : *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Bou82] N. Bourbaki : *Éléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie*. Masson, Paris, 1982. Chapitre 9. Groupes de Lie réels compacts.

[Bra12a] M. Brannan : Approximation properties for free orthogonal and free unitary quantum groups. *J. Reine Angew. Math.*, 672:223–251, 2012.

[Bra12b] M. Brannan : Quantum symmetries and strong Haagerup inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 311(1):21–53, 2012.

[Bra12c] M. Brannan : Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups. Preprint 2012, arXiv:1202.5020, 2012.

[BS89] S. Baaj et G. Skandalis : C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante. *K-Theory*, 2(6):683–721, 1989.

[BS93] S. Baaj et G. Skandalis : Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(4):425–488, 1993.

[BS09] T. Banica et R. Speicher : Liberation of orthogonal Lie groups. *Adv. Math.*, 222(4): 1461–1501, 2009.

[Buc99] A. Buchholz : Norm of convolution by operator-valued functions on free groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(6):1671–1682, 1999.

[BV97] M. E. B. Bekka et A. Valette : Group cohomology, harmonic functions and the first L^2-Betti number. *Potential Anal.*, 6(4):313–326, 1997.

[BV09] T. Banica et R. Vergnioux : Growth estimates for discrete quantum groups. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 12(2):321–340, 2009.

[CCJ+01] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg et A. Valette : *Groups with the Haagerup property*, volume 197 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.

[CG86] J. Cheeger et M. Gromov : L_2-cohomology and group cohomology. *Topology*, 25(2): 189–215, 1986.

[CHT09] B. Collins, J. Härtel et A. Thom : Homology of free quantum groups. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(5-6):271–276, 2009.

[Coh76] A. M. Cohen : Finite complex reflection groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 9(3):379–436, 1976.

[Col04] B. Collins : Martin boundary theory of some quantum random walks. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 40(3):367–384, 2004.

[Con74] A. Connes : Almost periodic states and factors of type III_1. *J. Functional Analysis*, 16:415–445, 1974.

[Con76] A. Connes : Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$. *Ann. of Math. (2)*, 104(1):73–115, 1976.

[Con94] A. Connes : *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[CS05] A. Connes et D. Shlyakhtenko : L^2-homology for von Neumann algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 586:125–168, 2005.

[CS11] I. Chifan et T. Sinclair : On the structural theory of II_1 factors of negatively curved groups. Preprint 2011, arXiv:1103.4299, 2011.

[Cun82] J. Cuntz : The K-groups for free products of C^*-algebras. *In Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, volume 38 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 81–84. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[Cun83] J. Cuntz : K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math.*, 344:180–195, 1983.

[Der86] Y. Derriennic : Entropie, théorèmes limite et marches aléatoires. *In Probability measures on groups, VIII (Oberwolfach, 1985)*, volume 1210 de *Lecture Notes in Math.*, pages 241–284. Springer, Berlin, 1986.

[DR89] S. Doplicher et J. E. Roberts : A new duality theory for compact groups. *Invent. Math.*, 98(1):157–218, 1989.

[Dri87] V. G. Drinfel'd : Quantum groups. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 798–820, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

[DRVV10] A. De Rijdt et N. Vander Vennet : Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(1):169–216, 2010.

[Eff75] E. G. Effros : Property Γ and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47:483–486, 1975.

[ER94] E. G. Effros et Z.-J. Ruan : Discrete quantum groups. I. The Haar measure. *Internat. J. Math.*, 5(5):681–723, 1994.

[Fim11] P. Fima : Communication personnelle. 2011.

[Fim12] P. Fima : K-amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups. Preprint 2012, arXiv:1204.3477, 2012.

[FK97] I. B. Frenkel et M. G. Khovanov : Canonical bases in tensor products and graphical calculus for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. *Duke Math. J.*, 87(3):409–480, 1997.

[Fre12] A. Freslon : Examples of weakly amenable discrete quantum groups. Preprint 2012, arXiv:1207.1470, 2012.

[Ge98] L. Ge : Applications of free entropy to finite von Neumann algebras. II. *Ann. of Math. (2)*, 147(1):143–157, 1998.

[Ger96] E. Germain : KK-theory of reduced free-product C^*-algebras. *Duke Math. J.*, 82(3): 707–723, 1996.

[Ger97] E. Germain : Amalgamated free product C^*-algebras and KK-theory. *In Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 de *Fields Inst. Commun.*, pages 89–103. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Gro03] M. Gromov : Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):73–146, 2003.

[Haa79] U. Haagerup : An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property. *Invent. Math.*, 50(3):279–293, 1978/79.

[Hay00] T. Hayashi : Harmonic function spaces of probability measures on fusion algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 36(2):231–252, 2000.

[HG04] N. Higson et E. Guentner : Group C^*-algebras and K-theory. *In Noncommutative geometry*, volume 1831 de *Lecture Notes in Math.*, pages 137–251. Springer, Berlin, 2004.

[HI98] F. Hiai et M. Izumi : Amenability and strong amenability for fusion algebras with applications to subfactor theory. *Internat. J. Math.*, 9(6):669–722, 1998.

[HK01] N. Higson et G. Kasparov : E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.*, 144(1):23–74, 2001.

[INT06] M. Izumi, S. Neshveyev et L. Tuset : Poisson boundary of the dual of $\mathrm{SU}_q(n)$. *Comm. Math. Phys.*, 262(2):505–531, 2006.

[Iso12] Y. Isono : Examples of factors which have no cartan subalgebras. Preprint 2012, arXiv:1209.1728, 2012.

[Izu02] M. Izumi : Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions. *Adv. Math.*, 169(1):1–57, 2002.

[Jim85] M. Jimbo : A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69, 1985.

[Jol89] P. Jolissaint : K-theory of reduced C^*-algebras and rapidly decreasing functions on groups. *K-Theory*, 2(6):723–735, 1989.

[Jol90] P. Jolissaint : Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 317(1):167–196, 1990.

[Jun03] K. Jung : The free entropy dimension of hyperfinite von Neumann algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(12):5053–5089 (electronic), 2003.

[JV84] P. Julg et A. Valette : K-theoretic amenability for $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, and the action on the associated tree. *J. Funct. Anal.*, 58(2):194–215, 1984.

[KS91] G. G. Kasparov et G. Skandalis : Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, 4(4):303–337, 1991.

[KS97] A. Klimyk et K. Schmüdgen : *Quantum groups and their representations*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[KS07] T. Kemp et R. Speicher : Strong Haagerup inequalities for free $\mathscr{R}$-diagonal elements. *J. Funct. Anal.*, 251(1):141–173, 2007.

[KV00] J. Kustermans et S. Vaes : Locally compact quantum groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(6):837–934, 2000.

[KW99] E. Kirchberg et S. Wassermann : Permanence properties of C^*-exact groups. *Doc. Math.*, 4:513–558 (electronic), 1999.

[Kye08a] D. Kyed : L^2-Betti numbers of coamenable quantum groups. *Münster J. Math.*, 1:143–179, 2008.

[Kye08b] D. Kyed : L^2-homology for compact quantum groups. *Math. Scand.*, 103(1):111–129, 2008.

[Kye11] D. Kyed : A cohomological description of property (T) for quantum groups. *J. Funct. Anal.*, 261(6):1469–1493, 2011.

[Laf02] V. Lafforgue : K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.*, 149(1):1–95, 2002.

[Lem12] F. Lemeux : communication privée, 2012.

[Lüc98] W. Lück : Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers. I. Foundations. *J. Reine Angew. Math.*, 495:135–162, 1998.

[Lüc02] W. Lück : *L^2-invariants: theory and applications to geometry and K-theory*, volume 44 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Mey08] R. Meyer : Homological algebra in bivariant K-theory and other triangulated categories. II. *Tbil. Math. J.*, 1:165–210, 2008.

[MN06] R. Meyer et R. Nest : The Baum-Connes conjecture via localisation of categories. *Topology*, 45(2):209–259, 2006.

[MN10] R. Meyer et R. Nest : Homological algebra in bivariant K-theory and other triangulated categories. I. *In Triangulated categories*, volume 375 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 236–289. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[MvN43] F. J. Murray et J. von Neumann : On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44:716–808, 1943.

[Nag93] G. Nagy : On the Haar measure of the quantum $\mathrm{SU}(N)$ group. *Comm. Math. Phys.*, 153(2):217–228, 1993.

[NT04] S. Neshveyev et L. Tuset : The Martin boundary of a discrete quantum group. *J. Reine Angew. Math.*, 568:23–70, 2004.

[NV10] R. Nest et C. Voigt : Equivariant Poincaré duality for quantum group actions. *J. Funct. Anal.*, 258(5):1466–1503, 2010.

[OO01] H. Oyono-Oyono : Baum-Connes conjecture and group actions on trees. *K-Theory*, 24(2):115–134, 2001.

[OP10] N. Ozawa et S. Popa : On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra. *Ann. of Math. (2)*, 172(1):713–749, 2010.

[Oza04] N. Ozawa : Solid von Neumann algebras. *Acta Math.*, 192(1):111–117, 2004.

[Pet09] J. Peterson : L^2-rigidity in von Neumann algebras. *Invent. Math.*, 175(2):417–433, 2009.

[Pim86] M. V. Pimsner : KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Invent. Math.*, 86(3):603–634, 1986.

[Pop83] S. Popa : Orthogonal pairs of $*$-subalgebras in finite von Neumann algebras. *J. Operator Theory*, 9(2):253–268, 1983.

[Pop08] S. Popa : On the superrigidity of malleable actions with spectral gap. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(4):981–1000, 2008.

[Pow75] R. T. Powers : Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators. *Duke Math. J.*, 42:151–156, 1975.

[PT11] J. Peterson et A. Thom : Group cocycles and the ring of affiliated operators. *Invent. Math.*, 185(3):561–592, 2011.

[PV12] S. Popa et S. Vaes : Unique cartan decomposition for ii_1 factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups. Preprint 2012, arXiv:1201.2824, 2012.

[PW90] P. Podleś et S. L. Woronowicz : Quantum deformation of Lorentz group. *Comm. Math. Phys.*, 130(2):381–431, 1990.

[Ros90] M. Rosso : Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. *Duke Math. J.*, 61(1):11–40, 1990.

[Rua96] Z.-J. Ruan : Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras. *J. Funct. Anal.*, 139(2):466–499, 1996.

[Ser77] J.-P. Serre : *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[Ska88] G. Skandalis : Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz). *K-Theory*, 1(6):549–573, 1988.

[ST54] G. C. Shephard et J. A. Todd : Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.*, 6:274–304, 1954.

[Tom06] R. Tomatsu : Amenable discrete quantum groups. *J. Math. Soc. Japan*, 58(4):949–964, 2006.

[Tom07] R. Tomatsu : A characterization of right coideals of quotient type and its application to classification of Poisson boundaries. *Comm. Math. Phys.*, 275(1):271–296, 2007.

[Tu99] J.-L. Tu : The Baum-Connes conjecture and discrete group actions on trees. *K-Theory*, 17(4):303–318, 1999.

[Vae05] S. Vaes : A new approach to induction and imprimitivity results. *J. Funct. Anal.*, 229(2):317–374, 2005.

[VD96] A. Van Daele : Discrete quantum groups. *J. Algebra*, 180(2):431–444, 1996.

[VDW96] A. Van Daele et S. Wang : Universal quantum groups. *Internat. J. Math.*, 7(2):255–263, 1996.

[Ver02] R. Vergnioux : *KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2002.

[Voi79] D. Voiculescu : Amenability and Katz algebras. *In Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique (Proc. Colloq., Marseille, 1977)*, volume 274 de *Colloq. Internat. CNRS*, pages 451–457. CNRS, Paris, 1979.

[Voi85] D. Voiculescu : Symmetries of some reduced free product C^*-algebras. *In Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Buşteni, 1983)*, volume 1132 de *Lecture Notes in Math.*, pages 556–588. Springer, Berlin, 1985.

[Voi96] D. Voiculescu : The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. III. The absence of Cartan subalgebras. *Geom. Funct. Anal.*, 6(1):172–199, 1996.

[Voi11] C. Voigt : The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups. *Adv. Math.*, 227(5):1873–1913, 2011.

[VVV08] S. Vaes et N. Vander Vennet : Identification of the Poisson and Martin boundaries of orthogonal discrete quantum groups. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(2):391–412, 2008.

[VVV10] S. Vaes et N. Vander Vennet : Poisson boundary of the discrete quantum group $\widehat{A_u(F)}$. *Compos. Math.*, 146(4):1073–1095, 2010.

[Wan95] S. Wang : Free products of compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 167(3):671–692, 1995.

[Wan98] S. Wang : Quantum symmetry groups of finite spaces. *Comm. Math. Phys.*, 195(1):195–211, 1998.

[Was88] A. Wassermann : Coactions and Yang-Baxter equations for ergodic actions and subfactors. *In Operator algebras and applications, Vol. 2*, volume 136 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 203–236. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[Wor87] S. L. Woronowicz : Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):613–665, 1987.

[Wor88] S. L. Woronowicz : Tannaka-Kreĭn duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups. *Invent. Math.*, 93(1):35–76, 1988.

[Wor98] S. L. Woronowicz : Compact quantum groups. *In Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, pages 845–884. North-Holland, Amsterdam, 1998.