Problème 2

I. 1. Montrer que pour tout réel x la série numérique de terme général $\frac{1}{n}Arctan\frac{x}{n}$ est convergente. On pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}Arctan\frac{x}{k}$ et $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}Arctan\frac{x}{k}$

2. Montrer que la fonction f ainsi définie est impaire et croissante.sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

5. Montrer que pour $n \geq 1$ $\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq S_n(n) \leq f(n)$ En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

II. On considère la série de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de terme général $f_n(x) = \frac{x}{n^{\frac{3}{2}} + x^2}$ et on note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ la somme de la série.

1.a. Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

1.c. Montrer que pour tout réel a strictement positif, cette série converge normalement sur [-a,a].

2. En déduire que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

III. On considère la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

1. Quel est son rayon de convergence ?

2. Calculer la somme de cette série (sous forme d'une fraction rationnelle).
Indication : on note f la somme de la série ; $f(x) = xg(x)$; calculer le développement en série entière au voisinage de 0 de la primitive G de g, nulle en 0 ; etc. Justifier les calculs.