Université Denis Diderot
DEUG MIAS Info MT231 2002-2003

Devoir à la maison

À rendre en TD, au plus tard le 23 octobre

Exercice 1 Dans cet exercice, $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle et, pour tout entier positif n, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ la somme partielle à l'ordre n de la série de terme général $a_n 10^{-n}$. Si cette série est convergente, on note S sa somme : autrement dit, $S = \lim S_n$.

1. On suppose que la suite (a_n) est constante : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad a_n = a$, pour un certain réel a. Montrer que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente et calculer S.
2. On suppose que les a_n sont des entiers compris entre 0 et 9, pour tout n. Montrer que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente et déterminer le développement décimal de S. Que se passe-t-il si a_n est égal à 9 pour tout n ?
3. On suppose que la suite (a_n) est donnée par la récurrence suivante :
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$
   (a) Montrer qu'on a $0 \leq a_n \leq 2^n$ pour tout n. En déduire que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente.
   (b) Donner la valeur de S. On pourra démontrer et utiliser la formule suivante :
$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad S_{n+2} - a_0 - \frac{a_1}{10} = \frac{S_n}{100} + \frac{S_{n+1} - a_0}{10}.$$
4. On suppose que la suite (a_n) est donnée par les égalités $a_{3k} = 2$, $a_{3k+1} = 1$ et $a_{3k+2} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer S_{3k+2} pour tout k.
   (b) En déduire que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente et calculer S.
5. On suppose que l'on a $a_{n+3} = a_n$ pour tout n, et que a_0, a_1, a_2 sont des entiers.
   (a) Montrer que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente.
   (b) Montrer qu'il existe un entier A tel que $S = \frac{A}{999}$.

Exercice 2 On définit les suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ en posant
$$a_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})} \quad \text{et} \quad u_n = \operatorname{Log}\big(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\big).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est divergente.
2. Exprimer $\operatorname{Log}(\sqrt{n}\ a_n)$ en fonction des sommes partielles de la série de terme général u_n.
3. En déduire que la suite $(\sqrt{n}\ a_n)_n$ est convergente. Quelle est sa limite ?
4. Démontrer l'égalité $a_{n+1} = \sqrt{n}\ a_n - \sqrt{n+1}\ a_{n+1}$, pour tout $n \geq 2$.
5. En déduire que la série de terme général a_n est convergente et calculer sa somme.