Université Denis Diderot 2002-2003
DEUG MIAS Info MT231

Devoir à la maison n° 1
Corrigé

Exercice 1

1. La série $(\sum a_n 10^{-n})$ est égale à la série géométrique de raison 10^{-1} multipliée par la constante a. Comme $|10^{-1}| < 1$, elle est donc convergente et on sait calculer sa somme : $S = a\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = a/(1-10^{-1})$.
2. C'est une question de cours. Pour tout n on a $0 < a_n 10^{-n} < 9 \times 10^{-n}$. D'après la question précédente, la série de terme général 9×10^{-n} converge. D'après le théorème de comparaison la série de terme général $a_n 10^{-n}$ converge donc aussi. Par définition du développement décimal, on a $S = a_0, a_1a_2a_3\cdots$. Lorsque $a_n = 9$ pour tout n on a d'après la question précédente $S = 9/(1-10^{-1}) = 10$.
3. (a) On procède par récurrence généralisée. Aux rangs 0 et 1, il est facile de vérifier l'encadrement demandé : $0 \le a_0 = 1 \le 2^0 = 1$ et $0 \le a_1 = 1 \le 2^1 = 2$. On fixe ensuite $n \ge 1$, on suppose l'inégalité $0 \le a_k \le 2^k$ vérifiée pour tout $k \le n$, et on cherche à la démontrer au rang $k = n+1$. Par hypothèse de récurrence on a
$$0 \le a_{n-1} + a_n \le 2^{n-1} + 2^n = 3 \times 2^{n-1} \le 2^{n+1}.$$
Comme $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, on a bien obtenu l'inégalité recherchée au rang $n+1$. Finalement on a $0 \le a_n \le 2^n$ pour tout n, donc $0 \le a_n 10^{-n} \le (2/10)^n$. Comme la série de terme général $(2/10)^n$ est une série géométrique convergente, le théorème de comparaison montre que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ converge.

   (b) La relation $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ donne $a_{k+2}10^{-(k+2)} = (a_{k+1}10^{-(k+1)})/10 + (a_k 10^{-k})/100$ en multipliant par $10^{-(k+2)}$. On somme alors sur k, entre $k=0$ et $k=n$:
$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+2}10^{-(k+2)} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}10^{-(k+1)} + \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}.$$
Puis on effectue deux changements d'indice :
$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k 10^{-k} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k} + \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}.$$
Les trois sommes qui apparaissent dans cette égalité sont successivement égales à $S_{n+2} - a_0 - a_1 10^{-1}$, $S_{n+1} - a_0$ et S_n. En remplaçant, on obtient bien l'identité annoncée dans l'énoncé. Il suffit alors de passer à la limite dans cette identité : S_{n+2}, S_{n+1} et S_n tendent tous les trois vers S et on a donc
$$S - a_0 - \frac{a_1}{10} = \frac{S-a_0}{10} + \frac{S}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{89}{100}\ S = \frac{9}{10}\ a_0 + \frac{1}{10}\ a_1.$$
En reportant pour finir les valeurs $a_0 = a_1 = 1$, on obtient $S = \frac{100}{89}$.
4. (a) Pour calculer S_{3k+2} on remarque que l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 3k+2\}$ est la réunion disjointe de $\{0, 3, \ldots, 3k\}$, $\{1, 4, \ldots, 3k+1\}$ et $\{2, 5, \ldots, 3k+2\}$. On a donc
$$\sum_{i=0}^{3k+2} a_i 10^{-i} = \sum_{j=0}^{k} a_{3j}10^{-3j} + \sum_{j=0}^{k} a_{3j+1}10^{-(3j+1)} + \sum_{j=0}^{k} a_{3j+2}10^{-(3j+2)}.$$
Par hypothèse on a $a_{3j} = 2$, $a_{3j+1} = 1$ et $a_{3j+2} = 0$ pour tout j, donc
$$S_{3k+2} = 2 \times \sum_{j=0}^{k}(10^{-3})^j + \sum_{j=0}^{k}(10^{-3})^j \times 10^{-1} + 0 = (2+10^{-1})\ \frac{1-(10^{-3})^{k+1}}{1-10^{-3}}.$$

(b) Pour tout entier n il existe un entier k tel que $n = 3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ et on a donc $a_n \in \{0, 1, 2\}$ par hypothèse. On peut donc appliquer la question 2 : la série de terme général $a_n 10^{-n}$ est convergente. Ainsi la suite (S_n) converge vers S, et en particulier sa sous-suite (S_{3k+2}) converge aussi vers S. La question précédente montre alors que $S = \frac{2+10^{-1}}{1-10^{-3}} = \frac{700}{333}$.

5. (a) Soit $\alpha = 0$, 1 ou 2. Montrons par récurrence sur k qu'on a $a_{3k+\alpha} = a_\alpha$: c'est évident au rang 0, et si c'est vrai au rang k on a $a_{3(k+1)+\alpha} = a_{3k+\alpha+3} = a_{3k+\alpha}$ grâce à l'hypothèse sur (a_n), donc $a_{3(k+1)+\alpha} = a_\alpha$ par hypothèse de récurrence. On a donc pour tout k : $a_{3k} = a_0$, $a_{3k+1} = a_1$ et $a_{3k+2} = a_2$. En particulier, soit M le plus grand des trois entiers $|a_0|$, $|a_1|$ et $|a_2|$, on a $|a_n| \leq M$ pour tout n, donc $|a_n 10^{-n}| \leq M\,10^{-n}$. Le théorème de comparaison montre donc que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ converge absolument.

   (b) On procède exactement comme à la question 4, grâce aux égalités $a_{3k} = a_0$, $a_{3k+1} = a_1$ et $a_{3k+2} = a_2$ établies précédemment :

$$S_{3k+2} = a_0 \times \sum_{j=0}^{k} (10^{-3})^j + a_1 \sum_{j=0}^{k} (10^{-3})^j \times 10^{-1} + a_2 \sum_{j=0}^{k} (10^{-3})^j \times 10^{-2} \quad \text{donc}$$
$$S = \frac{a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2}}{1 - 10^{-3}} = \frac{a_0 10^3 + a_1 10^2 + a_2 10}{999}.$$

Exercice 2

1. La suite $(1/\sqrt{n})$ est positive et tend vers 0. Or la fonction logarithme est croissante et on a $\mathrm{Log}\,(1+x) \sim_0 x$. Par conséquent la suite (u_n) est positive et équivalente à $(1/\sqrt{n})$. La série de Riemann de terme général $1/\sqrt{n}$ est divergente donc, d'après le théorème de comparaison, la série de terme général u_n est également divergente.
2. On a $\mathrm{Log}\, xy = \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y$ et $\mathrm{Log}\, x = -\mathrm{Log}\, x^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,(\sqrt{n}\; a_n) &= \mathrm{Log}\,\left(\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdots\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\,\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = -\sum_{k=1}^{n} u_k. \end{aligned}$$

3. La suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est divergente d'après la question 1. Par ailleurs, elle est croissante car les u_n sont positifs. Donc elle tend vers $+\infty$. D'après la question 2 la suite $(\mathrm{Log}\,(\sqrt{n}\; a_n))$ tend donc vers $-\infty$. Par passage à l'exponentielle, on en déduit que la suite $(\sqrt{n}\; a_n)$ converge vers 0.
4. On mène le calcul en réduisant au même dénominateur et en utilisant l'égalité $\sqrt{n!}\,\sqrt{n+1} = \sqrt{(n+1)!}$. On a, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\; a_n - \sqrt{n+1}\; a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})} - \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{n!}\;(1+\sqrt{n+1}) - \sqrt{(n+1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n+1})} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

5. Le résultat de la question précédente montre qu'on a affaire à une série « télescopique ». Plus précisément on a, en effectuant des changements d'indices :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} a_k = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k+1} &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{k}\; a_k - \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{k+1}\; a_{k+1} \\ &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{k}\; a_k - \sum_{k=3}^{n} \sqrt{k}\; a_k = a_2 + \sqrt{2}\; a_2 - \sqrt{n}\; a_n. \end{aligned}$$

   Cette égalité et le résultat de la question 3 montrent que la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n converge vers $(1+\sqrt{2})\; a_2 = 1/2$.