Université Denis Diderot (Paris VII) 2002-2003
MT231

Devoir à la maison sur les séries de fonctions

À rendre en TD, au plus tard le 27 novembre

Notation : de même que $\sum_{i=1}^n u_i$ désigne la somme pour i allant de 1 à n des u_i,
$\prod_{i=1}^n u_i$ désigne le produit pour i allant de 1 à n des u_i.

Problème Soient $q \in]-1,1[$ un réel fixé dans toute la suite, et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1-qx)f(qx). \tag{1}$$

Le but du problème est de montrer que f est développable en série entière, de rayon de convergence infini.

1. Soient f et g deux fonctions continues solutions de l'équation (1), telles que $f(0) = g(0)$.
   a) Montrer que la fonction $h = f - g$ est une fonction continue vérifiant
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (1-qx)h(qx), \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} h(q^n x) = 0.$$
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(q^n x)\prod_{i=1}^n (1-q^i x)$.
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \ln(1-q^n x)$ est convergente. (Attention : pour $x > 1$, la série n'est définie qu'à partir d'un rang $N(x)$ assez grand). En déduire que la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geq 1$ par $\pi_n = \prod_{i=1}^n (1-q^i x)$ est convergente (pour $x > 1$, et pour $n \geq N(x)$, on découpera le produit en deux termes : $\prod_{i=1}^{N(x)-1}(1-q^i x) \times \prod_{i=N(x)}^n (1-q^i x)$).
   d) Montrer que $h = 0$.

2. On suppose dans cette question que f est développable en série entière de rayon de convergence infini : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En utilisant l'équation fonctionnelle (1), montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{q^{n+1}-1} a_n. \tag{2}$$

3. Soit maintenant f une solution continue de l'équation (1). On pose $a_0 = f(0)$. En utilisant a_0 et l'identité (2), on construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence infini, et, en notant $g(x)$ sa somme pour tout réel x, montrer que la fonction g est une solution de l'équation (1).
   b) En utilisant la question 1., montrer que la fonction $h = f - g$ est la fonction nulle.

4. Conclure.

Exercice Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (i.e., $\exists r \in \mathbb{N} \;\; M^r = 0$).

1. En factorisant $I_n - M^r$, montrer que $I_n - M$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
   est inversible, et calculer son inverse.