Université Denis Diderot (Paris VII) 2002-2003
MT231

Devoir à la maison sur les séries de fonctions

Correction

Problème Soient $q \in]-1,1[$ un réel fixé dans toute la suite.

1. a) La fonction h est continue comme différence de deux fonctions continues. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - g(x) = (1-qx)f(qx) - (1-qx)g(qx) = (1-qx)(f(qx) - g(qx)) = (1-qx)h(qx).$$

Donc h est une solution de l'équation (1). De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} h(q^n x) &= h(0) && \text{par continuité de } h \text{ en } 0 \text{ et car } \lim_{n\to+\infty} q^n x = 0 \\ &= f(0) - g(0) = 0 && \text{car par hypothèses, } f(0) = g(0). \end{aligned}$$

b) On fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(qx)(1-qx)$ car h est une solution de (1). Supposons le résultat acquis au rang n et montrons le au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(qx)(1-qx) && \text{car } h \text{ est solution de (1)} \\ &= h(q^{n+1}x)\prod_{i=1}^{n}(1-q^i qx)(1-qx) && \text{par hypothèse de récurrence appliquée au réel } qx \\ &= h(q^{n+1}x)\prod_{i=1}^{n+1}(1-q^i x) && \text{en faisant le changement d'indice } i \leftarrow i+1. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve par récurrence.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 1$ l'expression $\ln(1-q^n x)$ a un sens pour tout entier n (c'est clair si $x \leq 0$, et si $x \in]0,1[$, alors $q^n x \in]0,1[$, donc $1 - q^n x > 0$). Sinon, cette expression n'a de sens que quand $1 - q^n x > 0$, i.e., quand $q^n < \frac{1}{x}$, soit encore quand $n > \frac{\ln x}{-\ln q}$. Dans tous les cas, on note $N(x)$ le plus petit entier n pour lequel $\ln(1-q^n x)$ a un sens. On s'interesse à la convergence de la série de terme général $(\ln(1-qx))_{n \geq N(x)}$. Or $\ln(1-q^n x) = -q^n x + q^n \varepsilon(q^n)$, où $\varepsilon(q^n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Or $-q^n x$ et q^n sont les termes généraux de séries absolument convergentes (c'est $-x$ fois, respectivement majoré (pour n assez grand) par 1 fois, le terme général d'une série géométrique de raison $|q| < 1$). Donc on en déduit la convergence de la série $\sum \ln(1-q^n x)$.
Montrons que la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Quitte à oublier les $N(x)-1$ premiers termes, et à diviser par ces $N(x)-1$ premiers termes (ce qui change la valeur de la limite éventuelle mais pas la nature (convergente, divergente, sans limite) de la suite), il suffit de montrer que la suite $(\varpi_n)_{n\geq N(x)}$ définie par $\varpi_n = \prod_{i=N(x)}^{n}(1-q^i x)$ est convergente. Or

$$\ln(\varpi_n) = \ln\left(\prod_{i=N(x)}^{n}(1-q^i x)\right) = \sum_{i=N(x)}^{n}\ln(1-q^i x)$$

Donc par le début de la question, on sait que $(\ln(\varpi_n))$ converge. En passant à l'exponentielle, on en déduit que la suite $(\varpi_n)_{n\geq N(x)}$ et donc la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait par la question 1.b que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h(x) = h(q^n x)\prod_{i=1}^{n}(1-q^i x)$. Or par continuité de h en 0, et car $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} h(q^n x) = h(0) = 0$. Par ailleurs, la question 1.c nous indique que la limite $l(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-q^i x)$ existe et est finie. On peut ainsi écrire

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(h(q^n x)\prod_{i=1}^{n}(1-q^i x)\right) = 0 \times l(x) = 0.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) = (1-qx)f(qx) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (qx)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n qx(qx)^n && \text{car } f \text{ est solution de (1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q^n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+1} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q^n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} q^n a_{n-1} x^n && \text{en faisant } i \leftarrow i+1 \text{ dans le second terme} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q^n a_n - q^n a_{n-1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'unicité du développement en série entière pour des séries entières de rayon de convergence $R > 0$, on en déduit : $\forall n \geq 1$, $a_n = q^n a_n - q^n a_{n-1}$, soit $a_n(q^n - 1) = q^n a_{n-1}$. On peut réécrire ceci sous la forme : $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{q^{n+1}-1} a_n$.

3. a) On va appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières. Pour cela on calcule

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^{n+1}-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{car } | \, q \, |< 1.$$

Le critère de D'Alembert nous dit alors exactement que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence infini. Par ailleurs, si $q = 0$, $g(x) = a_0 = (1 - 0 \times x)a_0 = (1 - 0x)g(0x)$, sinon on reprend le calcul de la question 2. : si x est un réel,

$$\begin{aligned}
(1-qx)g(qx) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q^n a_n - q^n a_{n-1}\right) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q^n a_n - q^n \frac{q^n - 1}{q^n} a_n\right) x^n && \text{par construction des } a_n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (q^n - (q^n - 1)) a_n x^n && \text{en simplifiant} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = g(x).
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction g définie par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien une solution de l'équation (1).

b) Par définition de la fonction g, $g(0) = a_0 = f(0)$. De plus, f et g sont toutes deux continues sur $\mathbb{R}$ (f par hypothèses, et g car c'est une série entière de rayon de convergence infini). Ainsi, la question 1.d) nous dit que la fonction $h = f - g$ est la fonction nulle.

4. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation fonctionnelle (1). On lui associe la série entière de rayon de convergence infini g construite à la question 3.a). La question précédente nous dit alors que $f = g$, autrement dit f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Exercice

1. On a $I_n = I_n - M^r = (I_n - M)\left(\sum_{k=0}^{r-1} M^k\right)$. De même, $I_n = \left(\sum_{k=0}^{r-1} M^k\right)(I_n - M)$. Ainsi, $I_n - M$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{r-1} M^k$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n - aN \quad \text{où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Un calcul facile montre que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

En itérant on constate alors que

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et que } N^n = 0.$$

Ainsi, N, et donc aN est nilpotente. Par la question 1. on en déduit que la matrice $M = I_n - aN$ est inversible, et que son inverse est

$$M^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k N^k = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & a^{n-2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$