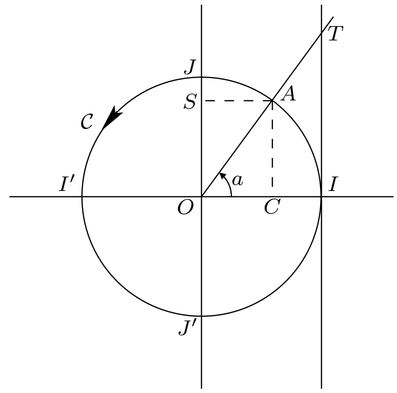
Chapitre à trous :

Fonctions trigonométriques

1 Définitions

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1) dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ orthonormé. Soit A un point de $\mathcal{C}$, S et C ses projetés orthogonaux sur (OJ) et (OI) respectivement.

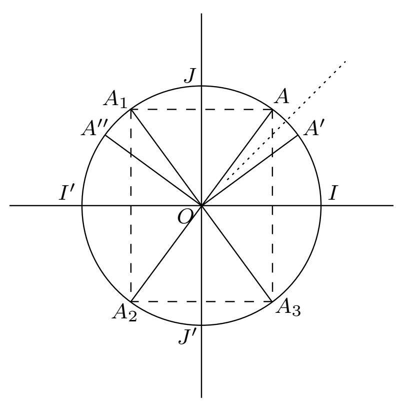


La *mesure* $a \in \mathbb{R}$ de l'angle orienté $\widehat{IOA}$ est la longueur (orientée) de l'arc IA sur $\mathcal{C}$. On *définit* 2π comme étant la longueur d'un tour complet, et on convient que deux réels différents de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ mesurent le même angle orienté.

Le *sinus* de a est la longueur (orientée) de $\overrightarrow{OS}$, et le cosinus de a est celle de $\overrightarrow{OC}$. Cela définit des fonctions $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques.

Si A est différent de J et J', la droite dirigée par $\overrightarrow{OJ}$ passant par I et la droite (OA) se coupent en un unique point T. La tangente de a est alors la longueur (orientée) de IT. Elle est définie lorsque a n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et on obtient ainsi une fonction π-périodique de a : en effet la droite (OA) est inchangée lorsqu'on change a en $a + \pi$.

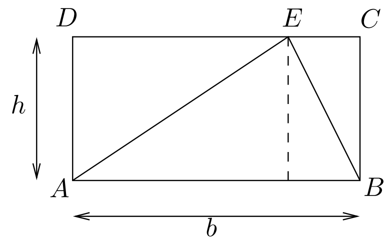
Les points A_1, A_2, A_3, A', A'' repérés par les angles de mesures $\pi - a$, $\pi + a$, $-a$, $\frac{\pi}{2} - a$ et $\frac{\pi}{2} + a$ sont placés comme suit sur $\mathcal{C}$:



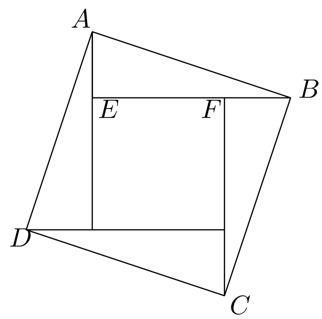
En déduire les sinus et cosinus de $\pi - a$, $\pi + a$, $-a$, $\frac{\pi}{2} - a$ et $\frac{\pi}{2} + a$ en fonction de ceux de a.

2 Un peu de géométrie

On commence par un petit échauffement. L'aire d'un rectangle ABCD de côtés $AB = x$, $BC = y$ vaut $\mathcal{A}(ABCD) = xy$. En considérant les figures ci-dessous, on en déduit facilement l'aire d'un triangle et le théorème de Pythagore :

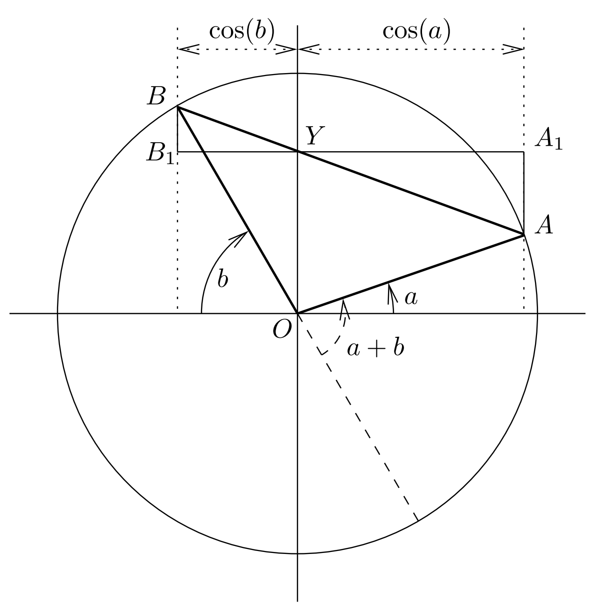


Calculer l'aire de $ABCD$ en fonction de b et h, et en déduire $\mathcal{A}(ABE)$.



On pose $a = AE$, $b = BE$ et $c = AB$. Quelle est l'aire de ABE ? Combien vaut EF ?
En déduire que $c^2 = (b - a)^2 + 2ab$, et le théorème de Pythagore.

Démontrons maintenant, également de manière géométrique, la formule d'addition pour les sinus, qui donne une expression de $\sin(a+b)$ en fonction des sinus et cosinus de a et b. On considère la figure suivante, inscrite dans le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ — rappelons que le rayon de $\mathcal{C}$ vaut 1.



Les triangles YAA_1 et YBB_1 sont semblables : on a $\frac{\quad}{YA_1} = \frac{\quad}{YB_1}$. Notons y l'ordonnée de Y, déduire de la relation précédente une expression de y en fonction des sinus et cosinus de a et b.

En utilisant OY comme base, calculer les aires $\mathcal{A}(OYA)$ et $\mathcal{A}(OYB)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$ et y.

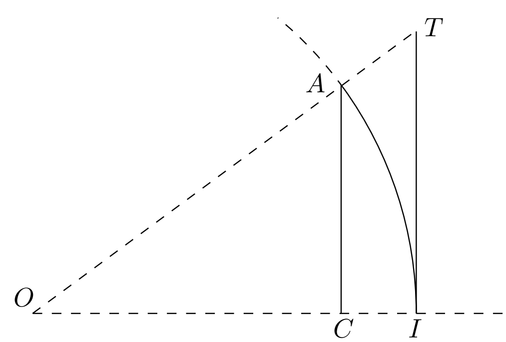
D'autre part, calculer directement l'aire de OAB en utilisant OB comme base.
En déduire la formule d'addition pour les sinus.

En utilisant les formules $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$ établies dans la première partie, la formule d'addition pour les cosinus se déduit de celle pour les sinus :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) = \sin(a+\tfrac{\pi}{2}+b) &= \sin(a+\tfrac{\pi}{2})\cos(b) + \cos(a+\tfrac{\pi}{2})\sin(b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Enfin, nous aurons besoin d'un encadrement qui se « voit » aussi sur la figure : la longueur (non orientée) de l'arc IA est comprise entre les longueurs des segments CA et IT, et cela signifie qu'on a, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|. \tag{1}$$



3 Application à l'analyse

On commence par établir la continuité et la dérivabilité de sin et cos au point 0, essentiellement grâce à l'inéquation (1).

Montrer à l'aide de (1) que $\sin(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
En déduire que $\cos(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Montrer, toujours à l'aide de (1), que $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.
En déduire que sin est dérivable en 0 et donner la valeur de $\sin'(0)$.

En utilisant l'encadré précédent, montrer que $(1 - \cos(x))/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. (Il y a une petite astuce.) En déduire que cos est dérivable en 0 et déterminer $\cos'(0)$.

Maintenant, les formules d'addition établies dans la deuxième partie permettent de passer de la dérivabilité au point 0 à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ entier !

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(a + x)$.
Montrer, à l'aide de la formule d'addition pour le sinus, que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Le résultat obtenu dans le dernier encadré montre que sin est dérivable en a et que $\sin'(a) = \cos(a)$. À nouveau, les identités de la première partie donnent le résultat correspondant pour le cosinus :

$$\cos'(x) = (\sin(x + \tfrac{\pi}{2}))' = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x).$$

Ainsi sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et en particulier elles sont continues. C'est aussi le cas de tan sur son domaine de définition, par le théorème de dérivation des quotients. Connaissant les valeurs de sin et cos en $\frac{\pi}{2}$, il n'est pas difficile de voir que $\tan(x)$ tend vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$ et vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. On peut également calculer sa dérivée :

Démontrer les égalités $\tan'(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$.

La formule obtenue pour $\tan'$ montre immédiatement que tan est strictement croissante sur chacun des intervalles où elle est définie. D'autre part, comme les signes de sin et cos sont évidents sur le cercle trigonométrique, on est également en mesure de dresser le tableau de variation de ces fonctions :

	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
signe de $\cos x$					
signe de $-\sin x$					
variation de $\sin x$					
variation de $\cos x$					

Finalement on a besoin de quelques valeurs particulières. En $\frac{\pi}{2}$ et ses multiples, elles se lisent immédiatement sur le cercle trigonométrique. Faisons le calcul en $x = \frac{\pi}{4}$. On note s et c les valeurs du sinus et du cosinus en ce point, et on a grâce à la formule d'addition pour les cosinus

$$0 = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4}) = c^2 - s^2 = 2c^2 - 1.$$

Comme c et s sont positifs on en déduit $\cos(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2}$ puis $\sin(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2}$. On peut procéder de la même manière en $\frac{\pi}{3}$, en appliquant deux fois les formules d'addition :

On pose $s = \sin(\frac{\pi}{3})$ et $c = \cos(\frac{\pi}{3})$. Calculer $\sin(3 \times \frac{\pi}{3})$ en fonction de s et c.
En déduire les valeurs de s et c.