Fonctions trigonométriques

CORRIGÉ

En déduire les sinus et cosinus de $\pi - a$, $\pi + a$, $-a$, $\frac{\pi}{2} - a$ et $\frac{\pi}{2} + a$ en fonction de ceux de a.

$$\begin{array}{lll} \cos(\pi - a) = -\cos(a) & \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a) & \cos(-a) = \cos(a) \\ \sin(\pi - a) = \sin(a) & \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a) & \sin(-a) = -\sin(a) \\ \cos(\pi + a) = -\cos(a) & \cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin(a) & \\ \sin(\pi + a) = -\sin(a) & \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a) & \end{array}$$

Calculer l'aire de $ABCD$ en fonction de b et h, et en déduire $\mathcal{A}(ABE)$.

On a $\mathcal{A}(ABCD) = bh$ d'après le rappel. Soit H le projeté orthogonal de E sur (AB). Les triangles AHE et ADE ont la même aire par symétrie, ainsi que BHE et BCE. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABE) &= \mathcal{A}(AHE) + \mathcal{A}(BHE) = (\mathcal{A}(AHE) + \mathcal{A}(ADE) + \mathcal{A}(BHE) + \mathcal{A}(BCE))/2 \\ &= \mathcal{A}(ABCD)/2 = bh/2. \end{aligned}$$

On pose $a = AE$, $b = BE$ et $c = AB$. Quelle est l'aire de ABE ? Combien vaut EF ?
En déduire que $c^2 = (b - a)^2 + 2ab$, et le théorème de Pythagore.

D'après l'encadré précédent $\mathcal{A}(ABE) = ab/2$. Par ailleurs $EF = b - a$ car les quatre triangles rectangles ont des petits côtés de même longueur. Ainsi

$$c^2 = \mathcal{A}(ABCD) = 4 \times \mathcal{A}(ABE) + EF^2 = 2ab + (b - a)^2 = a^2 + b^2.$$

Cela démontre le théorème de Pythagore pour le triangle ABE rectangle en E.

Les triangles YAA_1 et YBB_1 sont semblables : on a $\frac{AA_1}{YA_1} = \frac{BB_1}{YB_1}$. Notons y l'ordonnée de Y, déduire de la relation précédente une expression de y en fonction des sinus et cosinus de a et b.

Par définition des sinus et cosinus de a on a $AA_1 = y - \sin(a)$, $YA_1 = \cos(a)$ et de même $BB_1 = \sin(b) - y$ et $YB_1 = \cos(b)$. Par conséquent la relation donnée dans l'énoncé s'écrit

$$\frac{y - \sin(a)}{\cos(a)} = \frac{\sin(b) - y}{\cos(b)} \iff y \times (\cos(a) + \cos(b)) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

En utilisant OY comme base, calculer les aires $\mathcal{A}(OYA)$ et $\mathcal{A}(OYB)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$ et y.

On a $\mathcal{A}(OYA) = y\cos(a)/2$ et $\mathcal{A}(OYB) = y\cos(b)/2$.

D'autre part, calculer directement l'aire de OAB en utilisant OB comme base.
En déduire la formule d'addition pour les sinus.

La hauteur de OAB relative à OB a pour longueur $OA \times \sin(a + b)$. Comme $OA = OB = 1$ il vient

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= 2 \times \mathcal{A}(OAB) = 2(\mathcal{A}(OYA) + \mathcal{A}(OYB)) \\ &= y(\cos(a) + \cos(b)) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

d'après les encadrés précédents. Cela démontre la formule d'addition pour les sinus.

Montrer à l'aide de (1) que $\sin(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
En déduire que $\cos(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

On a $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0$. Cela équivaut à $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$. Par ailleurs on a $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$ d'après le théorème de Pythagore, donc $\lim_{x\to 0}(\cos x)^2 = 1$. Comme $\cos x$ est positif pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x = \sqrt{(\cos x)^2}$ donc $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \sqrt{1^2} = 1$.

Montrer, toujours à l'aide de (1), que $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.
En déduire que sin est dérivable en 0 et donner la valeur de $\sin'(0)$.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x \neq 0$, l'inégalité (1) peut s'écrire comme suit :

$$|\sin(x)| \leq |x| \leq \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right| \iff 1 \leq \left|\frac{x}{\sin(x)}\right| \leq \frac{1}{\cos(x)} \iff |\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1.$$

On a vu à l'encadré précédent que $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$, le théorème des gendarmes montre donc que $|\sin(x)/x|$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Comme $\sin(x)$ et x sont de même signe sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $|\sin(x)/x| = \sin(x)/x$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Cela signifie que sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

En utilisant l'encadré précédent, montrer que $(1-\cos(x))/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. (Il y a une petite astuce.) En déduire que cos est dérivable en 0 et déterminer $\cos'(0)$.

On multiplie en haut et en bas par $(1+\cos x)$, et on utilise le théorème de Pythagore :

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-(\cos x)^2}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Le premier terme tend vers 1 d'après le dernier encadré, et l'encadré précédent montre que le second terme tend vers 0. Ainsi $(\cos x - 1)/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Cela signifie que cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(a+x)$.
Montrer, à l'aide de la formule d'addition pour les sinus, que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

On a $f(x) = \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x)$. Les termes $\sin(a)$ et $\cos(a)$ sont constants, donc les deux encadrés précédents montrent que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \sin(a)\cos'(0) + \cos(a)\sin'(0) = \cos(a)$.

Démontrer les égalités $\tan'(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$.

On utilise le théorème de dérivation des quotients et, pour la première forme de $\tan'$, le théorème de Pythagore :

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} \quad \text{et} \quad 1 + \tan^2.$$

On pose $s = \sin(\frac{\pi}{3})$ et $c = \cos(\frac{\pi}{3})$. Calculer $\sin(3 \times \frac{\pi}{3})$ en fonction de s et c.
En déduire les valeurs de s et c.

On écrit $3 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ et on applique une première fois la formule d'addition pour les sinus :

$$\sin(3 \times \tfrac{\pi}{3}) = s \times \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + c \times \sin(\tfrac{2\pi}{3}).$$

Puis on écrit $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ et on applique les formules d'addition pour les sinus et pour les cosinus :

$$\sin(3 \times \tfrac{\pi}{3}) = s(c^2 - s^2) + c(sc + cs) = 3sc^2 - s^3.$$

En remplaçant c^2 par $1 - s^2$ et en remarquant par ailleurs que $\sin(3 \times \frac{\pi}{3}) = \sin(\pi) = 0$ on aboutit à l'équation $0 = 3s - 4s^3$. Comme $\frac{\pi}{3} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $s > 0$ donc on peut simplifier par s et écrire $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$. Une dernière application du théorème de Pythagore donne $c = 1/2$.