DEVOIR MAISON :

Fonctions homographiques et ping-pong

On note $SL(2,\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients entiers telles que $ad - bc = 1$, et on définit la fonction homographique h_A associée à A en posant, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

L'objectif des deux premiers exercices est d'établir quelques propriétés « géométriques » des fonctions homographiques. On considère au deuxième exercice les disques et les demi-plans ouverts suivant :

$$\begin{array}{rclcrcl} D_k & = & \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2k}| < \frac{1}{2k}\} & \text{et} & H_k & = & \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > k\}, \\ D' & = & \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} & \text{et} & H' & = & \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| > 1\}. \end{array}$$

Rappelons qu'on appelle antécédent de y par une fonction f tout élément x tel que $f(x) = y$.

Exercice 1. On fixe une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$, et un nombre complexe w.

a. Montrer que les coefficients c et d ne peuvent être tous deux nuls.

b. Quel est le domaine de définition de h_A ? *(On distinguera deux cas.)*

c. On suppose $c \neq 0$. Combien d'antécédents w a-t-il par h_A ? *(On distinguera deux cas.)*

Exercice 2. On considère le cas où A est triangulaire inférieure, c'est-à-dire $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer qu'on a $|2k\, h_A(z) - 1| < 1$ si $k > 0$ et $\operatorname{Re}(z) > 0$.
(On évitera de mettre z sous forme cartésienne ou trigonométrique.)

b. En déduire que h_A envoie H_0 dans D_k si k est strictement positif.

c. Montrer qu'on a $|h_A(z)| < 1$ si $|k| \geq 2$ et $|z| > 1$. *(On pourra utiliser une inégalité triangulaire.)*

d. En déduire que h_A envoie H' dans D' si $|k| \geq 2$.

e. Vérifier par ailleurs que si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $|k| \geq 2$, l'application h_A envoie D' dans H'.

Rappelons que la composée $f \circ g$ de deux fonctions f et g est définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, lorsque cela est possible. L'objectif du prochain exercice est de montrer que la composition des fonctions homographiques correspond à la multiplication des matrices. On note $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Précision facultative. Lorsqu'on compose des fonctions homographiques, on est confronté à des problèmes de domaine de définition. Pour remédier à cela, on rajoute un « point abstrait » ∞ à $\mathbb{C}$ en posant $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On étend ensuite h_A à $\tilde{\mathbb{C}}$ en posant, si $c \neq 0$, $\tilde{h}_A(-d/c) = \infty$ et $\tilde{h}_A(\infty) = a/c$, et si $c = 0$, $\tilde{h}_A(\infty) = \infty$. On obtient ainsi une fonction $\tilde{h}_A : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ définie sur $\tilde{\mathbb{C}}$ entier.

Exercice 3. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ deux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$.

a. Exprimer les coefficients du produit $A'A$ en fonction de ceux de A et A'.

b. Vérifier que $A'A$ est un élément de $SL(2,\mathbb{Z})$.

c. Vérifier que A admet $\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ comme inverse.

d. Lorsque la quantité $h_{A'}(h_A(z))$ est définie, l'exprimer comme quotient de deux polynômes en z.

e. En déduire que $h_{A'} \circ h_A = h_{A'A}$.
(Pour être vraiment correct il faut écrire cette égalité avec les fonctions $\tilde{h}$.)

Pour le dernier exercice, on fixe deux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$: $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On veut montrer qu'on ne peut jamais avoir d'identité du type

$$A^{k_1}B^{l_1}A^{k_2}B^{l_2}A^{k_3}\cdots B^{l_{p-1}}A^{k_p} = I \tag{$*$}$$

où les puissances k_1, l_1, $\ldots$, l_{p-1}, k_p sont des entiers relatifs non nuls (sauf éventuellement le premier et le dernier). On dit alors que les matrices A et B sont *libres* dans $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour cela on utilise les résultats géométriques du deuxième exercice. Rappelons qu'on note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Exercice 4. *(Facultatif)* On prend $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

a. Calculer A^2 et A^3. Deviner une formule générale pour A^n.
b. Démontrer la formule de la question précédente par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   (On utilisera en particulier l'identité $A^{n+1} = AA^n$.)
c. Montrer que la formule est également valable pour $n < 0$.
   (On utilisera la formule $A^{-n} = (A^n)^{-1}$ et le résultat de la question 3c).
d. En remarquant que B est la transposée de A, donner une formule pour B^n.
e. Montrer à l'aide des questions 2d et 2e qu'on a $h_{A^k}(H') \subset D'$ et $h_{B^k}(D') \subset H'$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.
f. En déduire que $h_{A^k} \circ h_{B^l} \circ h_{A^m}(H') \subset D'$ pour tous $k, l, m \in \mathbb{Z}^*$. Peut-on avoir $A^kB^lA^m = I$?

Avec exactement le même raisonnement, on montre qu'on ne peut pas avoir d'identité du type $(*)$ avec des produits de longueur arbitraire commençant et finissant par une puissance non nulle de A. Pour les produits qui commencent par une puissance non nulle de A et finissent par une puissance non nulle de B, il faut une petite astuce supplémentaire. Considérons par exemple $C = A^kB^lA^mB^n$ avec $k, l, m, n \in \mathbb{Z}^*$, et écrivons $n = n_1 + n_2$ avec $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$. En multipliant à gauche par B^{n_2} et à droite par B^{-n_2} on a :

$$\begin{aligned} C = I &\iff B^{n_2}CB^{-n_2} = B^{n_2}B^{-n_2} \iff B^{n_2}A^kB^lA^mB^{n_1+n_2}B^{-n_2} = I \\ &\iff B^{n_2}A^kB^lA^mB^{n_1} = I. \end{aligned}$$

Mais à nouveau, cela est impossible car le membre de gauche envoie D' dans H'. En effet B^{n_1} envoie D' dans H', qui est envoyé par A^m dans D', que B^l envoie à nouveau dans H', qui est à nouveau envoyé par A^k dans D', que B^{n_2} envoie finalement dans H'. Autrement dit, A et B jouent au ping-pong ...