Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 3

samedi 22 avril 2006

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

I. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé, et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3-2a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Vérifier qu'il ne dépend pas de a. Déterminer ses racines ainsi que leur multiplicité.
2. On considère le cas $a = 0$. Écrire la matrice A dans ce cas.
   (a) À l'aide du théorème du rang, montrer que les sous-espaces propres de f sont des droites.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On revient au cas général.
   (a) Écrire la matrice $A - I_3$. À quelle condition sur a cette matrice est-elle de rang 1 ?
   (b) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

II. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}$ pour $t \neq 0$, et $f(0) = 0$. On pose

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \quad \text{et} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(2xy) = f(x^2 + y^2)\}.$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ \neq}} \dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$.
2. En utilisant la question précédente, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit P une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ P$ est continue.
4. Montrer que D et A sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ et que $D \subset A$. Montrer que ni D ni A ne sont compacts.

III. Dans les deux premières questions de cet exercice, on établit deux résultats « généraux », qui sont ensuite appliqués dans les deux dernières questions.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé, et $f_1 :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f_1(a) = f_2(a)$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(t) = f_1(t)$ si $t \leq a$ et $f(t) = f_2(t)$ si $t \geq a$.
   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.
   Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = f(e^{x+y})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Démontrer la continuité de la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x, y) = \ln(3 - e^{x+y}) \ \text{ si } \ x + y \leq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \ln(1 + e^{x+y}) \ \text{ si } \ x + y > 0.$$
4. Démontrer la continuité de la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x, y) = \ln(2 - e^{x+y}) \ \text{ si } \ x + y \leq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x + y) = x + y \ \text{ si } \ x + y > 0.$$