Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
EMA 43

Partiel n^o 4

lundi 15 mai 2006

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

I. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + z^2 + 2xy + 4yz.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique en donnant l'expression de la forme bilinéaire φ associée.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
   Dans la suite de l'exercice on munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire.
3. Calculer les quantités $\|(0, 0, 1)\|$, $\|(-2, 1, -2)\|$ et $(0, 0, 1) \cdot (-2, 1, 0)$.
   Donner l'équation du plan P orthogonal au vecteur $(0, -1, 2)$.
4. Trouver une base de P, puis une base orthonormale de P.

II. On définit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que $\lim_{t\to 0} t \sin(\frac{1}{t}) = 0$, puis que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles sur cet ensemble.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$ et les calculer.
4. Montrer que f admet l'application linéaire nulle comme différentielle en $(0, 0)$.
5. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ entier ?
   On admettra que la quantité $\dfrac{1}{x} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

III. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, sachant que $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en explicitant ses dérivées partielles.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles nulles en $(0, 0)$.
4. Quelle relation vérifierait $f(x, x)$ si f était différentiable en $(0, 0)$?
   Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}$ et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.